

GRAVIMETRÍA

Dr. Francisco Ruiz (*)

fruiz@unsj-cuim.edu.ar

(*) **Instituto Geofísico Sismológico “Ing. F. Volponi”
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de San Juan**

Cátedra: ELEMENTOS DE GEOFÍSICA

Carrera: Ingeniería en Agrimensura

Páginas:56

LEY DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

La fuerza de la gravedad exhibe notables características, ella no puede ser desviada, un objeto no puede protegerse de ella, no existe materia antigravitatorio (al menos aún no se la conoce), actúa tanto sobre la materia como sobre la energía (luz y radiación). Afecta al espacio curvándolo y al tiempo produciendo su dilatación, lo cual quiere decir que la geometría que la describe no es Euclídea.

Se debería considerar a la gravedad como la primera fuerza, y la más significativa, dado que si bien es débil penetra en todo el Universo y organiza todo su espacio original en galaxias, estrellas, planetas, satélites...

Es por demás conocida la ley de gravitación universal de Newton (deducida luego de conocida las leyes de Kepler), que dice que todo pasa como si dos partículas materiales se atrajeran con una fuerza de dirección coincidente con la de la recta que las une, de intensidad directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Newton logró demostrar que un cuerpo esférico atrae a otro en la misma forma que si la masa estuviera concentrada en su centro, de modo que la ley de Newton tiene validez para describir la interacción que ejercen entre sí los planetas, siempre que midamos la distancia de centro a centro de masas.

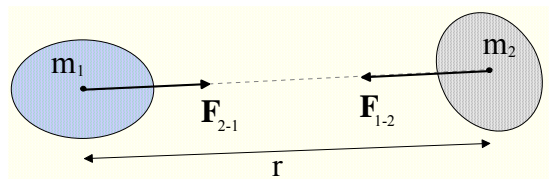


Figura 1: Interacción gravitatoria de dos masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r .

$$\text{Esta clásica ley se expresa como: } \vec{F} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$

Donde m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos separados por una distancia r e influidos mutuamente por la fuerza \mathbf{F} . El signo negativo de la ecuación expresa el hecho de que la interacción es atractiva, y la fuerza aplicada en la masa m_1 está por tanto dirigida hacia la masa m_2 , como se ve en la Figura 1.

G es la constante de gravitación universal $= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$. La constante de gravitación G describe la fuerza expresada en N (Newton) ejercida entre dos cuerpos de masas de 1kg, cuyos centros distan 1m entre sí y cuyas masas están concentradas en sus centros. Se la mide en laboratorios. En el año 1797, Cavendish realizó por primera vez la medición de G resultando un valor de $G = 6,754 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

La expresión (II.1) fue utilizada sin reparos hasta que las teorías Einsteinianas abrieron nuevos caminos en el campo científico. No obstante, para los propósitos de este curso, nos valdremos de las sencillas expresiones Newtonianas, dado que numéricamente para nuestro campo restringido proporcionan los mismos resultados.

Campo Gravitatorio

La ecuación 1 establece que para que se manifieste el fenómeno de la atracción gravitatoria es necesaria la presencia de dos masas m_1 y m_2 . Además esta interacción se produce "a distancia", a través del espacio vacío, y sin que medie intercambio alguno de materia o energía entre las dos masas que interactúan. Este concepto de "acción a distancia" conlleva determinados problemas teóricos de difícil solución, por lo que se ha propuesto un marco conceptual, llamada teoría de campos, que intenta resolver estas dificultades.

Según la teoría de campos, puede considerarse que la interacción es fruto de un "cambio" o condición que la masa m_1 genera en el espacio que la rodea. La manifestación de este cambio en la región que rodea la masa recibe el nombre de campo gravitatorio.

Cuando en un punto de este espacio donde la masa m_1 ha generado un campo gravitatorio colocamos otra masa de prueba m_2 , es el campo, y no directamente la masa m_1 el que causa la fuerza de atracción. La acción a distancia se evita, puesto que ahora la acción es local, al ser el campo presente en el punto donde se coloca la masa de prueba el que genera la fuerza de interacción.

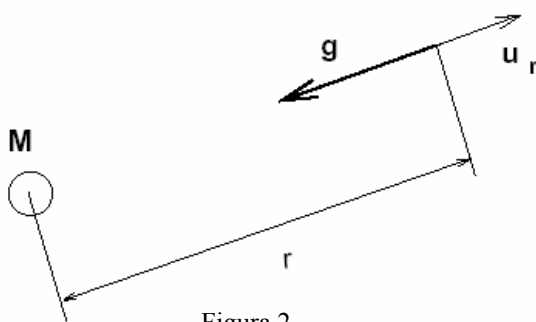


Figura 2

Para cuantificar el campo gravitatorio se usa el vector intensidad de campo gravitatorio, que se define como la fuerza sobre la unidad de masa, de forma que una masa puntual $m_1=M$ crea un campo gravitatorio cuya intensidad es:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \quad \text{ó} \quad \vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{u}_r \quad (2)$$

como se muestra en la Figura 2. La dimensión de esta magnitud es fuerza por unidad de masa, es decir la misma que la aceleración. Es fácil comprobar que cualquier cuerpo de cualquier masa, experimenta exactamente la misma aceleración en un determinado campo gravitatorio. Esta aceleración, si el cuerpo está sometido únicamente a la fuerza gravitatoria, coincide precisamente con la intensidad del campo gravitatorio. Puede pensarse entonces que el campo gravitatorio no es un campo de fuerzas (por unidad de masa), sino un campo de aceleraciones.

Ahora bien, en la definición de aceleración intervienen tanto el espacio como el tiempo, de forma que el campo gravitatorio es capaz de distorsionar estas dos magnitudes. Esta es la concepción de partida de la Relatividad General, teoría de la gravitación que corrige algunos aspectos de la teoría de la gravitación debida a Newton.

Concepto de trabajo

La observación de los fenómenos naturales ha demostrado que determinadas cantidades tienden a conservarse en muchos procesos. Una de estas cantidades es la energía. El concepto de energía, está íntimamente relacionado con el de trabajo.

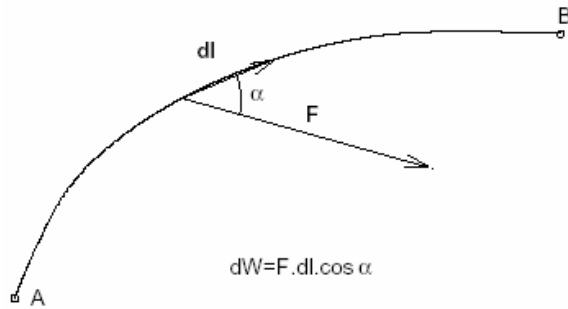


Figura 3

El trabajo realizado por una fuerza F cuando esta fuerza actúa sobre un cuerpo, y este cuerpo se mueve describiendo una trayectoria entre un punto A y un punto B , se define por la integral:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

El vector $d\vec{l}$ representa una porción infinitamente pequeña de la curva trayectoria, y se obtiene uniendo dos puntos infinitamente próximos de la misma (ver Figura 3). El integrando es un producto escalar entre la fuerza F y el desplazamiento elemental $d\vec{l}$. Teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar, el integrando es el producto del módulo de la fuerza por la proyección del desplazamiento elemental $d\vec{l}$ sobre la dirección de la fuerza ($d\vec{l} \cdot \cos \alpha$).

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

Es decir, el trabajo se define como el producto de la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza. Por ejemplo, si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, esa fuerza no realiza trabajo. En caso de que la fuerza tenga componente en el mismo sentido del desplazamiento, el trabajo es positivo, y negativo en caso contrario.

La expresión 3 puede también escribirse en función de las componentes de $d\vec{l}$ y de \mathbf{F} . Teniendo en cuenta que $d\vec{l}$ puede expresarse como $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, puesto que un vector diferencial debe tener también sus tres componentes diferenciales infinitamente pequeñas:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \quad (5)$$

donde F_x , F_y y F_z son las componentes de la fuerza \mathbf{F} . Cuando una fuerza realiza un trabajo, se supone que se realiza un intercambio de energía, de forma que puede considerarse que el trabajo es una energía en movimiento. La unidad de trabajo en el Sistema Internacional de unidades es el Joule o Julio ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$).

Fuerzas conservativas

En general el trabajo que realiza una fuerza entre dos puntos A y B depende de la trayectoria (camino) que se siga para trasladar el cuerpo sobre el que se realiza la fuerza desde A hasta B .

Existe sin embargo una importante excepción en el tipo de fuerzas, llamadas conservativas. El trabajo realizado por una fuerza conservativa, depende únicamente del punto inicial y del final de la trayectoria, pero no depende del camino recorrido entre ambos puntos.

Para que la integral de la ecuación 3 dependa sólo del punto inicial y final, el integrando debe ser una expresión diferencial exacta. Quiere esto decir que el integrando debe ser el diferencial de una función escalar. Esta función recibe el nombre genérico de función potencial (V) de la función vectorial \mathbf{F} .

$$dV = \bar{F} \cdot d\bar{l} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \quad (6)$$

En efecto, en este caso, en el que el integrando es la diferencial de la función V , el trabajo, expresado por la integral 3 puede escribirse:

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_A^B dV = V|_A^B = V(B) - V(A) \quad (7)$$

con lo que el trabajo sólo depende del valor que toma la función potencial en los puntos A y B, y por tanto sólo depende de los puntos A y B, pero no del camino recorrido. En otras palabras, se verifica que la fuerza \mathbf{F} es conservativa.

Teniendo en cuenta la definición de diferencial de una función escalar, puede escribirse en general (para cualquier función escalar V , sea o no una función potencial):

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (8)$$

Comparando esta expresión con la condición de fuerza conservativa (ecuación 6), se deduce que las componentes de la fuerza \mathbf{F} deben coincidir con las derivadas parciales de V con respecto a las tres variables x , y , z . Es decir, la fuerza \mathbf{F} es conservativa siempre que sus tres componentes puedan deducirse de una única función escalar V en la forma:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

A partir de estas tres componentes suele definirse un operador vectorial, llamado *gradiente* de la forma:

$$\text{grad} V = \bar{\nabla} \cdot V = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{k} \quad (9)$$

Usando el concepto de gradiente, puede decirse que una fuerza es conservativa si esta fuerza es el gradiente de una función escalar V . Esta función escalar se llama *función potencial* o simplemente *potencial* de la fuerza.

En el caso de que la función vectorial conservativa sea una fuerza, como lo es en el caso que estamos analizando, además del nombre genérico de potencial, suele emplearse más frecuentemente el nombre específico de Energía Potencial E_p , puesto que, el potencial tiene en este caso dimensiones de energía.

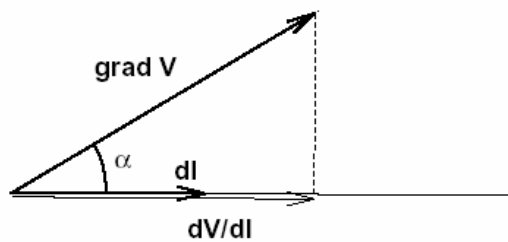
En resumen, se dice que una fuerza es conservativa si existe una función escalar, llamada Energía Potencial, tal que la fuerza es el gradiente de la energía potencial.

$$\vec{F} = \text{grad}.E_p = \text{grad}.V \quad (10)$$

Una propiedad importante del gradiente de una función escalar en un punto es que está relacionado con la variación espacial de esa función, es decir con sus derivadas parciales.

Superficies Equipotenciales

Una superficie equipotencial es por definición el lugar geométrico de puntos en los que la función potencial V permanece constante. Es fácil ver que el gradiente es perpendicular a las superficies equipotenciales.



$$dV/dl = \text{grad } V \cdot \cos \alpha$$

Figura 4

Por definición de superficie equipotencial, al movernos sobre ella una cantidad infinitesimal $d\vec{l}$, el potencial no cambia. Al ser $V = \text{cte}$, entonces $dV = 0$. Por tanto la derivada direccional en esa dirección debe ser nula:

$$\frac{dV}{dl} = \text{grad}.V \cdot d\vec{l} = 0$$

Como el producto escalar de los dos vectores $\text{grad}V$ y $d\vec{l}$ es nulo, ambos vectores deben ser perpendiculares, es decir, la dirección del gradiente es perpendicular a la dirección de $d\vec{l}$. Por tanto el gradiente debe ser perpendicular a la superficie equipotencial, ya que el vector $d\vec{l}$ está contenido en ella. Esta importante propiedad del gradiente está ilustrada en la Figura 4.

Energía Potencial Gravitatoria y Potencial Gravitatorio

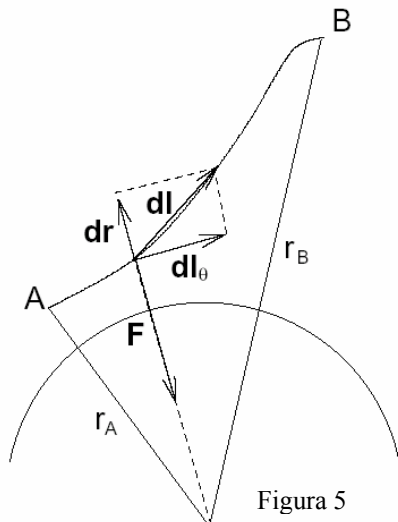


Figura 5

Puede demostrarse fácilmente que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sólo depende los puntos inicial y final y que por tanto la fuerza (y el campo) gravitatoria es conservativa.

Consideremos el caso de un objeto moviéndose entre los puntos A y B, sometido a la acción de la fuerza gravitatoria creada por ejemplo por la Tierra. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria \vec{F} en la trayectoria considerada esta dado por (3).

Considerando una trayectoria plana y usando un sistema de coordenadas polares (Fig. 5), $d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}_r + dl_\theta \cdot \vec{u}_\theta$,

donde \bar{u}_r y \bar{u}_θ son los vectores unitarios radial i transversal, entonces:

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int \bar{F} \cdot \bar{u}_r \cdot dr + \bar{F} \cdot \bar{u}_\theta \cdot dl_\theta$$

El segundo sumando del integrando es evidentemente nulo, puesto que la fuerza gravitatoria es radial, y por tanto perpendicular a u_θ . Sustituyendo ahora la fuerza gravitatoria por su valor según la Ley de Gravitación Universal:

$$W = \int_A^B \left(-G \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \bar{u}_r \right) \cdot \bar{u}_r \cdot dr = \int_A^B -G \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr = G \frac{M \cdot m}{r} \Big|_A^B = G \frac{M \cdot m}{r_B} - G \frac{M \cdot m}{r_A} \quad (10)$$

El trabajo depende por tanto de las distancias del punto inicial (r_A) y final (r_B) al centro de la Tierra. En otras palabras, el trabajo no depende del camino recorrido entre A y B sino sólo de la posición de estos puntos. La fuerza gravitatoria es por tanto conservativa, y puede expresarse como el gradiente de una función escalar, que llamaremos energía potencial gravitatoria (Ep).

En Resumen:

Si cualquier cuerpo inicialmente estando en reposo cae libremente, después un segundo habrá recorrido casi 5 m. El aumento de la velocidad vertical de un cuerpo cayendo libre de fricción se denomina aceleración de la gravedad o sólo gravedad y se la expresa en m/s^2 . La aceleración de la gravedad g se debe a la aceleración gravitatoria, que la tierra ejerce sobre cada cuerpo, menos la fuerza centrífuga causada por la rotación de la tierra y dirigida en dirección perpendicular al eje de rotación y sentido hacia fuera.

Consideremos un cuerpo de masa m_1 atraída por la Tierra m_2 en reposo (sin su movimiento de rotación). La fuerza que actúa en el cuerpo, es igual al producto de su masa m por la aceleración g .

$$\mathbf{F} = m_1 \cdot \mathbf{g},$$

m_1 = masa del cuerpo en consideración

\mathbf{g} = aceleración de la masa m_1 .

La aceleración debida a un cuerpo de masa m_2 en un punto de masa m_1 a distancia r con respecto al centro del cuerpo de masa m_2 se obtiene por la división de la ecuación (1) respecto de m_1 , $\mathbf{F} = m_1 \cdot \mathbf{g} = G \cdot (m_1 \cdot m_2)/r^2$. Por consiguiente $\mathbf{g} = G \cdot (m_2/r^2)$.

Por consiguiente, la atracción gravitatoria en cualquier lugar de la superficie terrestre tiene numéricamente el mismo valor que la fuerza gravitatoria ejercida sobre una masa unitaria en el mismo lugar.

Las masas m_1 , m_2 se atraen una a la otra en forma totalmente simétrica, es conveniente hablar de masa atrayente y de masa atraída. Por simplicidad, diremos que la masa atraída es igual a la unidad de masa y denotamos a la atrayente como M , entonces: $\mathbf{g} = -G \cdot (M/r^2)$

A menudo se trabaja a partir del potencial. El potencial es un trabajo expresado por un escalar. Es el módulo de la gravedad g por una distancia. En el caso de concentrar la masa terrestre geocéntricamente, el potencial V será:

$$V = G \frac{M}{r}, \quad \text{con: } \bar{g} = -\bar{\nabla}V \quad (\bar{\nabla} : \text{gradiente})$$

o bien derivando el potencial cambiado de signo respecto de r (radio medio de la tierra), obtenemos g .

UNIDADES

En el sistema c.g.s de unidades, la gravedad se expresa en cm/s^2 o *Gal* (en honor a Galileo). Es decir:

$$1 \text{ Gal} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

A partir de 1971 se utiliza el SIU (Sistema Internacional de Unidades) para calcular magnitudes en gravimetría. Así, tendremos como valor medio de la aceleración de la gravedad para la Tierra:

$$g = 980,6 \text{ cm/s}^2 = 980,6 \text{ Gals.}$$

Frecuentemente se usa una unidad mil veces menor: el *miliGal* (*mGal*).

$$1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal, entonces:}$$

$$g = 980,6 \text{ cm/s}^2 = 980600 \text{ mGal}$$

En prospección gravimétrica se suele utilizar como unidad el décimo de mGal:

$$1 \text{ u.g. (utilizada en exploración petrolera)} = 0,1 \text{ mGal.}$$

Los gravímetros modernos miden en campaña variaciones de gravedad con ± 0.02 mGal de incertidumbre y aún con precisiones mayores (por ejemplo $1 \mu \text{ Gal} = 10^{-6} \text{ Gal}$).

El potencia V se suele expresar en $\text{Kgal} \cdot \text{m} = 10^3 \text{ Gal} \cdot \text{m}$. Por ejemplo el potencial terrestre (AIG, 1983) será $W_0 = (6263686 \pm 2) \text{ Kgal} \cdot \text{m}$.

Finalmente, el gradiente de gravedad $\delta g / \delta z$ se expresa en Eötvo:

$$1 \text{ Eötvo} = 1 \text{ mGal/10 Km, o bien:}$$

$$10^{-9} 1/\text{s}^2 \equiv 1 \text{ n s}^{-2} \text{ (donde n s, es un nano segundo)}$$

Por lo tanto el gradiente vertical de la gravedad normal es 3086 Eötvos, o bien 0,3086 mGal/m.

Actualmente la Asociación Internacional de Geodesia (1989) recomienda adoptar el sistema m.k.s racionalizado. Sus principales recomendaciones son:

1- El término gravedad g debe ser usado en general en el sentido de intensidad de campo de gravedad. Ella se expresará en Newton/Kg, siendo:

$$1 \text{ N/Kg} = 10^2 \text{ Gal} = 10^5 \text{ mGal} = 10^8 \mu \text{ Gal.}$$

Para la constante de gravitación universal “G”:

$$\text{N.m}^2/\text{Kg}^2$$

y para G.M: $\text{N.m}^2/\text{Kg}$.

2- El término gravedad en el sentido de aceleración en caída libre o simplemente aceleración de gravedad: a_g , deberá ser usado en cálculos cinemáticas (distancias, tiempo, velocidades, aceleración). En estos casos, las unidades serán el Gal ($= 10^{-2} \text{ m/s}^2$).

3- El potencial de gravedad (trabajo por unidad de masa) se expresará en Julios/kg, es decir:

$$\text{N.m/Kg} = \text{J/Kg}$$

Los números potenciales en unidades específicas de trabajo se dan en J/kg.

4- Para el gradiente de gravedad se conserva el Eötvö dado que depende sólo del tiempo (unidad compartida en ambos sistemas).

$$1 \text{ Eötvö} = 10^{-9} \text{ N Kg}^{-1} \text{ m}^{-1} = 10^{-9} \text{ 1/s}^2, \text{ tal como fuera visto.}$$

EL POTENCIAL DE UN CUERPO ESFÉRICO

El potencial puede ser considerado como el trabajo requerido para desplazar una unidad de masa dentro de un campo gravitatorio.

El Potencial En Un Punto Exterior De Una Capa Esférica

Consideremos una capa esférica (espacio comprendido entre dos esferas concéntricas muy próximas de radio a y espesor e . Calculemos el potencial debido a dicha capa de masa M_c en un punto P exterior. El anillo de espesor fijo e tiene un volumen:

$$dv = 2.\pi.a^2 .\text{sen}\theta.d\theta.e$$

siendo su masa: $dm = 2.\pi.a^2 .\sigma.e.\text{sen}\theta.d\theta$

con σ : densidad volumétrica.

El potencial en P debido al anillo ubicado a distancia l es:

$$dV_0 = \frac{G.dm}{l}$$

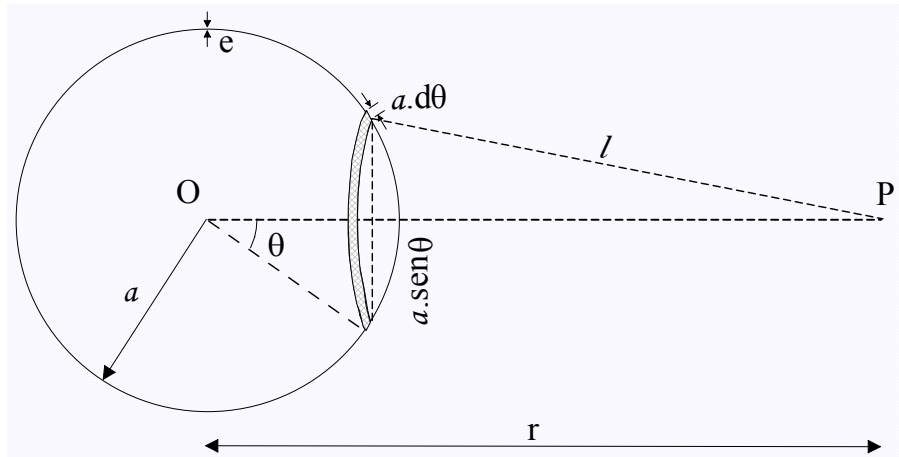


Figura II.2: Potencial de una capa esférica evaluada en un punto exterior P.

por el teorema del coseno: $l^2 = a^2 + r^2 - 2.a.r.\cos\theta$

derivando: $2.l.dl = 2.a.r.\text{sen}\theta.d\theta$

reemplazando nos queda:
$$dV_0 = \frac{(G.2.\pi.a^2.\text{sen}\theta.d\theta.e.\sigma)}{\left(\frac{2.a.r.\text{sen}\theta.d\theta}{2.dl}\right)} = \frac{G.2.\pi.a.e.\sigma}{r}.dl$$

Integrando para los límites: $\theta = 0$; $l = r - a$ y $\theta = \pi$; $l = r + a$

$$V_0 = \frac{2.\pi.a.\sigma.e.G}{r} \int_{r-a}^{r+a} dl = \frac{4.\pi.a^2.\sigma.e.G}{r} \quad (11)$$

La masa de la capa esférica es: $M_c = 4.\pi.a^2.e.\sigma$

Por lo tanto: $V_0 = \frac{G.M_c}{r}$

De aquí: $-\frac{\partial V}{\partial r} = g = \frac{G.M_c}{r^2}$

Una capa esférica atrae a un cuerpo exterior como si toda la masa estuviera concentrada en su centro. Dado que **una esfera sólida de masa M puede considerarse como formada por un gran número de capas esféricas superpuestas, concluimos que una esfera sólida** (y en particular nuestro planeta, en primera aproximación) **atrae a la materia sobre y fuera de su superficie como si toda su masa estuviera concentrada en su centro** (las líneas de fuerza y equipotenciales son las mismas que para un solo punto de masa geocéntrica). Entonces:

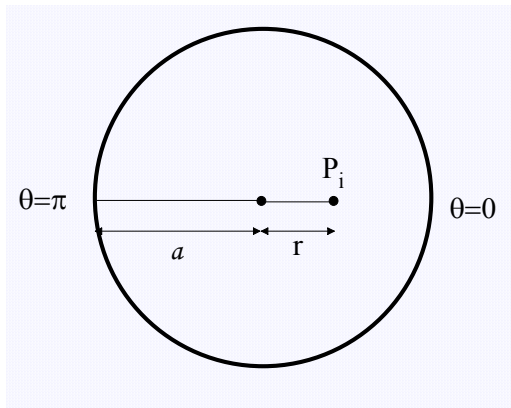
$$\boxed{V = \frac{G.M}{r}} ; \boxed{\bar{g} = -\frac{G.M}{r^2}} \quad (12)$$

En razón de la simetría, las superficies equipotenciales no pueden ser más que esferas concéntricas.

Debido a que $\sum M_i = M$, distintas combinaciones de capas esféricas de distintas densidades proporcionan el mismo campo gravitatorio exterior, lo cual constituye una seria dificultad para el conocimiento de la verdadera distribución de masas interiores.

El Potencial En Un Punto Interior (P_i) De La Capa Esférica

Para calcular el potencial en un punto interior, sigue siendo válida la integral (11), pero los límites serán ahora:



$$\theta = 0; l = a - r \quad \text{y} \quad \theta = \pi; l = a + r, \quad \text{con} \\ a \geq r$$

$$V_{0i} = \frac{G.M_c}{a} = 4.\pi.a.G.\sigma.e \quad (13)$$

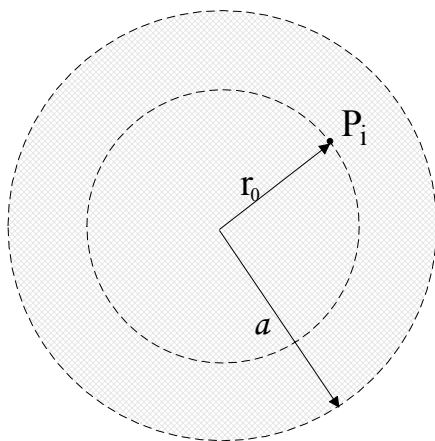
Por lo tanto:

$$g = -\frac{\partial V_{0i}}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

Figura II.3: Potencial de una capa esférica evaluada en un punto interior P_i .

En el interior de una capa esférica, el potencial es constante e independiente de la ubicación de P_i y la atracción gravitacional debida a la capa es nula.

El Potencial En Un Punto Interior De Una Esfera Homogénea De Densidad σ :



En coordenadas cartesianas el potencial en el punto P_i es la contribución de la esfera de radio r_0 (radio que pasa por P_i) mas la contribución de la capa comprendida entre r_0 y a . Así:

$$V_{Pi} = G.\sigma \left(\frac{4}{3} \pi.r_0^3 \right) \frac{1}{r_0} + 4.\pi.\sigma.G \int_{r_0}^a r.dr = \\ = \frac{4}{3} \pi.G.\sigma.r_0^2 + 4.\pi.G.\sigma \frac{r^2}{2} \Big|_{r_0}^a$$

Figura II.4: Potencial de una esfera evaluada en un punto interior P_i .

$$V_{Pi} = 4.\pi.G.\sigma \left[\frac{a^2}{2} - \frac{r_0^2}{6} \right] \quad (15)$$

Ejercicio Obligatorio: A) Desde (15) obtenga la gravedad ($-\delta V/\delta r$) y su gradiente ($\delta^2 V/\delta r^2$) respecto del radio en el interior de una esfera homogénea de densidad σ y radio a . B) Calcule

y grafique el potencial, la gravedad y el gradiente de gravedad respecto de r tanto en el interior como en el exterior de una esfera homogénea de radio $a=6371000\text{m}$, $\sigma=5510\text{kg/m}^3$. Se sugieren decrementos de r de 1000km hacia el interior de la esfera e incrementos de 10000km en el exterior.

EL CAMPO DE GRAVEDAD PARA UNA TIERRA ESFÉRICA EN ROTACIÓN

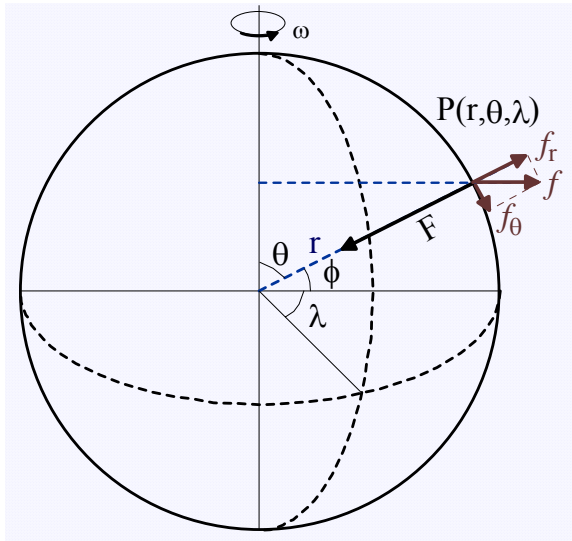


Figura II.5: Tierra como una esfera en rotación.

Si se considera a la tierra como una esfera en rotación con velocidad angular ω constante, las fuerzas que actúan sobre una masa unidad, en un punto P fijo en su superficie, son la atracción gravitacional de su masa F y la debida a la aceleración centrífuga f que en rigor debería llamarse axífuga debido a que es la distancia al eje de revolución. Los componentes de estas fuerzas en las coordenadas esféricas r, θ, λ son:

$$(F_r, F_\theta, F_\lambda) = \left(-\frac{G.M}{r^2}, 0, 0 \right)$$

$$f_r = \omega^2 \cdot r \cdot \cos^2 \phi \quad \text{ó:} \quad f_r = \omega^2 \cdot r \cdot \sin^2 \theta$$

$$(f_r, f_\theta, f_\lambda) = (\omega^2 \cdot r \cdot \sin^2 \theta, \omega^2 \cdot r \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, 0)$$

M : masa de la Tierra

r : distancia desde el centro al punto P (radio de la esfera)

G : constante de gravitación universal

ω : velocidad angular ($=\frac{2\pi}{T}$, véase 22)

Se define al vector de gravedad neta g como la suma de estas dos fuerzas:

$$(g_r, g_\theta, g_\lambda) = \left(-\frac{G.M}{r^2} + \omega^2 \cdot r \cdot \sin^2 \theta, \omega^2 \cdot r \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, 0 \right)$$

con: $g_r = -\frac{G.M}{r^2} + \omega^2 \cdot r \cdot \cos^2 \phi$

Cada una de estas dos aceleraciones puede ser deducida por un potencial escalar, el potencial gravitatorio V y el de la fuerza centrífuga Φ . Este último puede considerarse como la energía cinética producida por esta fuerza. La suma de estos dos potenciales nos da el potencial neto de la gravedad W .

$$W = V + \Phi = \frac{G.M}{r} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi \quad (16)$$

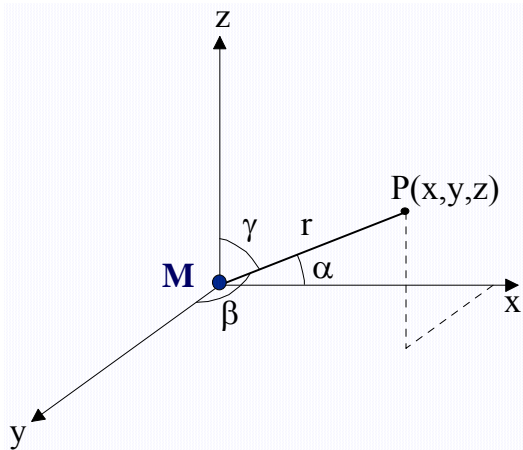
Esta interacción hace que la tierra en rotación se aparte de la forma esférica, tomando la forma de un esferoide. La Tierra, en primera aproximación, es bien definida por un elipsoide con abultamiento ecuatorial y achatamiento polar.

ECUACIONES DE LAPALACE Y POISSON

Las componentes de la aceleración de la gravedad debidas a una masa M a distancia r de $P(x,y,z)$ son:

$$g_x = \frac{GM}{r^2} \frac{x}{r}; \quad g_y = \frac{GM}{r^2} \frac{y}{r}; \quad g_z = \frac{GM}{r^2} \frac{z}{r} \quad (17)$$

$$\text{siendo: } \frac{x}{r} = \cos \alpha; \quad \frac{y}{r} = \cos \beta; \quad \frac{z}{r} = \cos \gamma$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad y$$

$$\frac{1}{r} = [x^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}}$$

El potencial de cual deriva la aceleración de la gravedad es: $V = \frac{G.M}{r}$

Desde el concepto de derivada direccional:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{GM}{r} \right)}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{G.M}{r^2} \frac{x}{r}$$

Figura II.6: Potencial en un punto exterior a una masa M .

Por lo tanto, las componentes de g en las tres direcciones serán:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = g_x; \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = g_y; \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = g_z$$

Derivemos g_x , g_y y g_z , respecto de x , y , z respectivamente:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = GM \frac{\partial [x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}]}{\partial x} = \frac{GM}{r^3} - 3 \frac{GM}{r^5} x^2$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = GM \frac{\partial [y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}]}{\partial y} = \frac{GM}{r^3} - 3 \frac{GM}{r^5} y^2$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = GM \frac{\partial [z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}]}{\partial z} = \frac{GM}{r^3} - 3 \frac{GM}{r^5} z^2$$

Sumando las tres expresiones se obtiene la conocida expresión de Laplace:

$$\boxed{\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = \text{div. } \vec{g} = 0} \quad (18)$$

Donde el operador *div* es la divergencia del vector gravedad. Otra forma de expresar el mismo resultado es el Laplaciano de V:

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \quad (19)$$

Generalización:

Este resultado puede generalizarse fácilmente para puntos exteriores de masas cualesquiera.

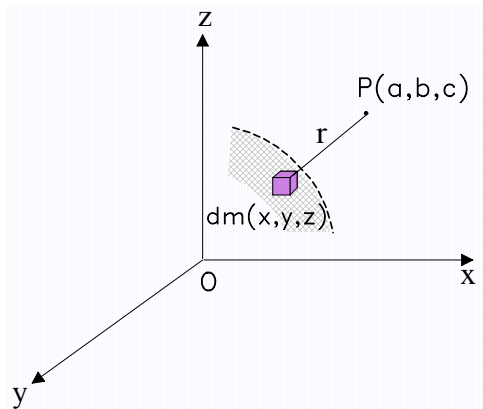


Figura II.7: Potencial en un punto exterior a una distribución de masa.

Considerando un sistema de coordenadas cartesianas X,Y,Z, el potencial de una masa elemental $dm(x,y,z)$ que ejerce sobre un punto exterior P(a,b,c) será:

$$V = G\sigma \iiint \frac{dx dy dz}{r} \quad (20)$$

Donde la masa es $dm = \sigma \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ y la distancia entre la masa atrayente y la atraída:

$$r = [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{1/2}$$

El vector de la atracción gravitatoria en cada dirección ortogonal se obtiene como:

$$\bar{g}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -G\sigma \iiint \frac{\partial [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{-1/2}}{\partial x} dx dy dz$$

$$\bar{g}_x = -G\sigma \iiint \frac{(a-x)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dx dy dz$$

$$\bar{g}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -G\sigma \iiint \frac{\partial [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{-1/2}}{\partial y} dx dy dz$$

$$\bar{g}_y = -G\sigma \iiint \frac{(b-y)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dx dy dz$$

$$\bar{g}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -G\sigma \iiint \frac{\partial [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{-1/2}}{\partial z} dx dy dz$$

$$\bar{g}_z = -G\sigma \iiint \frac{(c-z)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dx dy dz$$

Derivando otra vez:

$$\frac{\partial \bar{g}_x}{\partial x} = -G\sigma \iiint \frac{\partial [(a-x)[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{-3/2}}{\partial x} dx dy dz$$

resulta:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = G\sigma \iiint \frac{dx dy dz}{r^3} - 3G\sigma \iiint \frac{(a-x)^2}{r^5} dx dy dz$$

del mismo modo para las otras componentes:

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = G\sigma \iiint \frac{dx dy dz}{r^3} - 3G\sigma \iiint \frac{(b-y)^2}{r^5} dx dy dz$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = G\sigma \iiint \frac{dx dy dz}{r^3} - 3G\sigma \iiint \frac{(c-z)^2}{r^5} dx dy dz$$

De esta manera, sumando miembro a miembro, demostramos (18):

$$\boxed{\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = \text{div. } \vec{g} = 0}$$

Generalizamos entonces que para puntos exteriores a una masa el Laplaciano del potencial es igual a cero $\nabla^2 V = 0$. Donde no hay masas el Laplaciano del potencial es cero esto hace que la función V sea un armónico.

Aunque no se haya deducido aquí, es común en la bibliografía específica, utilizar el potencial gravitacional V sobre un esferoide (para puntos fuera del esferoide) que satisface la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2} \right) = 0} \quad (21)$$

Para un campo en rotación (nuestro planeta, por ejemplo) el Laplaciano será:

$$\nabla^2 \Phi = 2\omega^2 \quad (22)$$

La velocidad angular de la Tierra es:

$$\omega = \frac{1 \text{ revolución}}{1 \text{ día sidéreo}} = \frac{2\pi}{86164 \text{ seg}} = 0.00007292 \text{ .seg}^{-1}$$

El potencial debido a la rotación en coordenadas cartesianas es:

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \left(\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right)}{\partial x} = \omega^2 \cdot x; \quad \frac{\partial(\omega^2 \cdot x)}{\partial x} = \omega^2$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right)}{\partial y} = \omega^2 \cdot y; \quad \frac{\partial(\omega^2 \cdot y)}{\partial y} = \omega^2$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right)}{\partial z} = 0$$

Sumando estos resultados obtenemos $\nabla^2 \Phi = 2\omega^2 (= 1.06 \cdot 10^{-8})$ con lo cual verificamos (22). El potencial del cual deriva la fuerza centrífuga no es armónico, es decir, no verifica la ecuación de Laplace.

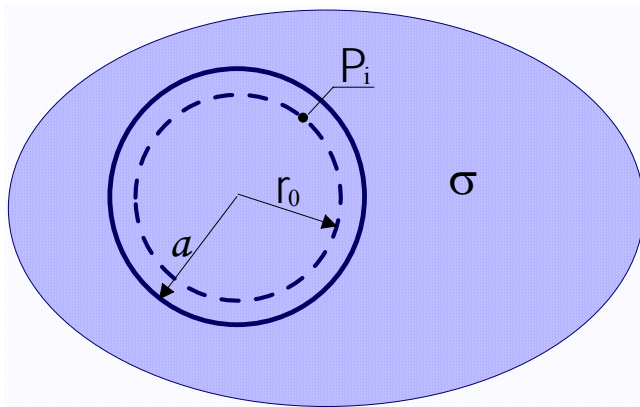
Ecuación Diferencial de Poisson

Poisson fue el primero en admitir que la ecuación de Laplace no tiene validez en el interior de las masas atractivas, en donde:

$$\boxed{\nabla^2 V = -4\pi G \sigma} \quad (23)$$

σ : densidad de la masa considerada.

Es interesante señalar que a partir de (15) puede demostrarse fácilmente la ecuación de Poisson (23). En efecto, de acuerdo con la figura II.8, el potencial total de un punto interior P_i será la suma del potencial de las masas ubicadas dentro de la esfera envolvente a P_i (V_E) más el potencial de las masas ubicadas entre la esfera envolvente a P_i y el borde del cuerpo (V_I), Así:



$$V_{P_i} = V_E + V_I$$

Sabemos que: $\nabla^2 V_E = 0$ (Ecuación de Laplace).

Figura II.8: Potencial en un punto interior de una distribución de masa.

Para V_I y de acuerdo con (II.15):

$$V_{P_i} = 4\pi \cdot G \cdot \sigma \cdot \left[\frac{a^2}{2} - \frac{r_0^2}{6} \right]$$

y con $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, se tiene:

$$\frac{\partial V_I}{\partial x} = \frac{\partial \left\{ 4.\pi.G.\sigma \left[\frac{a^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{6} \right] \right\}}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma.x$$

$$\frac{\partial V_I}{\partial y} = \frac{\partial \left\{ 4.\pi.G.\sigma \left[\frac{a^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{6} \right] \right\}}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma.y$$

$$\frac{\partial V_I}{\partial z} = \frac{\partial \left\{ 4.\pi.G.\sigma \left[\frac{a^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{6} \right] \right\}}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma.z$$

las derivadas segundas respecto de x, y, z serán:

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma$$

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma$$

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma$$

La suma de estas 3 derivadas segundas nos da la divergencia del vector gravedad en el interior de una masa:

$$\boxed{\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = \text{div. } \vec{g} = -4.\pi.G.\sigma} \quad (\text{II.24})$$

La ecuación (II.24) indica que habrá discontinuidades cuando la densidad σ cambie abruptamente.

Derivemos (II.15) respecto de r_0 :

$$\boxed{-\frac{\partial V_{pi}}{\partial r_0} = \frac{4}{3}\pi.G.\sigma.r_0 = \frac{G.M}{r_0^2}} \quad (\text{II.25})$$

La capa $(a-r_0)$ no tiene influencia.

Del análisis expuesto se deduce que el potencial de atracción de una esfera homogénea y sus primeras derivadas (g_i) son finitos y continuos en todo el espacio. Muy diferente es el comportamiento de las segundas derivadas de V. En efecto para un punto exterior:

$$V_E = \frac{G.M}{r} = \frac{4}{3}\pi.G.\sigma.\frac{a^3}{r}$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma.\frac{a^3}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 V_E}{\partial r^2} = -\frac{8}{3}\pi.G.\sigma.\frac{a^3}{r^3}$$

Cuando P se acerca a la superficie de la esfera por el exterior $a \rightarrow r$:

$$\frac{\partial^2 V_E}{\partial r^2} = \frac{8}{3}\pi.G.\sigma \quad (\text{II.26})$$

Desde (II.15):

$$\frac{\partial V_I}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma.r_0$$

Aproximándonos a la superficie de la esfera desde el interior cuando r_0 tienda a a

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial r^2} = -\frac{4}{3}\pi.G.\sigma \quad (\text{II.27})$$

El valor de la derivada primera se mantiene también en la superficie de la esfera (acercándose por dentro). Pero de la confrontación de ambas expresiones (II.26) y (II.27) vemos que la derivada segunda tiene, al pasar a través de la superficie, un abrupto salto de:

$$\frac{8}{3}\pi.G.\sigma + \frac{4}{3}\pi.G.\sigma = 4.\pi.G.\sigma$$

Las ventajas de introducir el concepto de potencial son varias. En primer lugar, el potencial es un escalar que se maneja con facilidad. Luego, derivándolo respecto de x , de y y de z obtenemos las tres componentes del vector gravedad g_x , g_y , g_z , que por el otro camino, el de las integraciones, se torna muchas veces dificultoso por la incidencia de los cosenos directores. Además introducimos con el potencial el concepto del trabajo a partir del cual podemos realizar un enfoque analítico del campo gravitatorio, salvo en los puntos singulares en donde es necesario determinar su esfera de seguridad, toda vez que deduzcamos las expresiones analíticas.

Las ecuaciones de Laplace y Poisson tienen aplicaciones de gran significación. Así, se los utiliza como control para determinar si en un problema V (o bien g_x , g_y , g_z) ha sido correctamente definido. Conociendo dos de los gradientes (por ejemplo \bar{g}_x y \bar{g}_y) se obtiene el otro (por ejemplo $\bar{g}_z = -(\bar{g}_x + \bar{g}_y)$)

LEY DE GAUSS

Una partícula de masa $+m$ ubicada en el centro de una superficie esférica Σ de radio r producirá un flujo gravitacional a través de ella igual a:

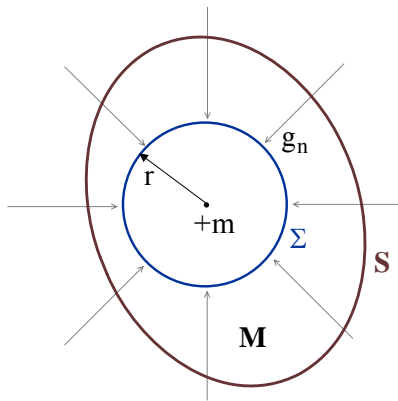


Figura II.9: Masa m ubicada dentro de las superficies Σ y S.

$$-g_n \cdot \Sigma = -\frac{G.m}{r^2} \cdot 4.\pi.r^2 = -4.\pi.G.m$$

Donde g_n es la gravedad (perpendicular a la superficie que atraviesa).

El signo (-) corresponde a flujo entrante. Este resultado puede generalizarse para el total de la masa M encerrada en la superficie S:

$$\iint_S g_n ds = -4.\pi.G.M \tag{II.28}$$

Esta es la bien conocida Ley de Gauss. Apliquemos el Teorema de la de la Divergencia:

$$\iint_S g_n ds = \iiint_V \text{div}.g.dv = \iiint_V -4.\pi.G.\sigma.dv \tag{II.29}$$

Igualando los integrandos de ambas integrales triples tendremos $\text{div}.\bar{g} = -4.\pi.G.\sigma(v)$, y volvemos a obtener la Ecuación de Poisson. Con $\sigma(v)$ densidad variable de acuerdo con la posición dentro el volumen de materia considerado.

A partir de la expresión (II.29), podemos obtener la masa M de un yacimiento a partir del campo gravitatorio que este genere. En términos prácticos para un hemisferio, en general, la superficie topográfica donde medimos el campo gravitatorio producido por una masa enterrada (es decir, recibimos la mitad del flujo gravitatorio de la masa), se utiliza:

$$M = \frac{1}{2.\pi} \iint_S g_n ds \tag{II.30}$$

VARIACIONES DE LA GRAVEDAD ENTRE EL POLO Y EL ECUADOR (FÓRMULA DE MC CULLAGH)

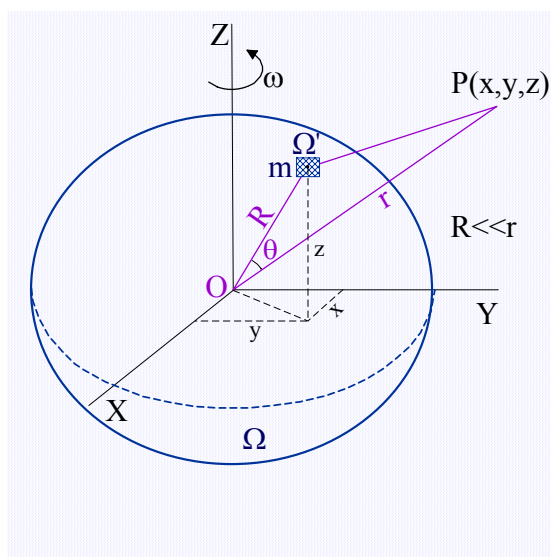


Figura II.10: Esferoide en rotación.

Sea O el centro de gravedad del cuerpo Ω' y r la distancia a un punto tal que \overline{OP} sea grande con relación a las dimensiones del cuerpo. Sea m la masa de un elemento del cuerpo situada en Ω' . El potencial en P será:

$$V = G \sum \frac{m}{P\Omega'} = G \sum \frac{m}{(R^2 + r^2 - 2.r.R.\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

ó:

$$V = G \sum \frac{m}{r} \left(1 - 2\frac{R}{r}\cos\theta + \frac{R^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{II.31}$$

El término de longitud ($l=P\Omega'$) puede desarrollarse en series si en II-31

$$\left(\frac{R^2}{r^2} - 2\frac{R}{r}\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

Si desarrollamos en series de potencias hasta el término cuadrático $(R/r)^2$, tendremos:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{R}{r}\cos\theta + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \dots \right) \right]$$

En el desarrollo en series se acostumbra escribir a la expresión anterior como:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[P_0(\cos\theta) + \frac{R}{r} P_1(\cos\theta) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \dots \right]$$

Como veremos más adelante en el desarrollo del potencial en esféricos armónicos, el término de longitud, corresponde a una de las funciones generales de los Polinomios de Legendre $P_n(\cos\theta)$ (armónicos zonales), con n grado del polinomio:

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}(\cos^2\theta - \frac{1}{3})$$

Es decir que el término de longitudes de II-31, puede escribirse:

$$\left(1 + \frac{R^2}{r^2} - 2\frac{R}{r}\cos\theta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

Donde el término de la derecha da la expresión de recurrencia para calcular los polinomios.

O sea que el término de longitudes en II-31 se puede escribir como la serie:

$$\frac{1}{P\Omega'} = \frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (\text{II.32})$$

De acuerdo con esto y truncando la serie en el término cuadrático, el potencial II-31 será:

$$V = \left[\frac{G}{r} \sum m + \frac{G}{r} \sum \frac{R}{r} \cos\theta \cdot m + \frac{G}{2r} \sum \frac{R^2}{r^2} (3 \cdot \cos^2\theta - 1) m + \dots \right] \quad (\text{II.33})$$

Pero:

$$\sum m = M \quad \text{es la masa total concentrada en el origen,}$$

$2\sum mR\cos\theta = 0$ como el origen está en el centro de masa, el segundo término representa la suma de todos los momentos de los elementos de masa con respecto a un eje que pasa por dicho centro, que es cero.

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, el tercer término puede descomponerse en la forma:

$$\frac{G}{2r} \sum \frac{R^2}{r^2} (3 \cdot \cos^2 \theta - 1) m = + \frac{G}{r^3} \sum R^2 \cdot m - \frac{3 \cdot G}{2r^3} \sum R^2 \sin^2 \theta \cdot m \quad (\text{II.34})$$

Poniendo $R^2 = 1/2[(y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) + (x^2 + y^2)]$ en el primer sumando del segundo miembro de (II.34), representa la suma de los momentos de inercia con respecto a los ejes X, Y, Z a los que se les llama A, B y C, mientras que el segundo sumando de (II.34) es el momento de inercia I alrededor del eje \overline{OP} . O sea:

$$2 \sum m R^2 = A + B + C, \text{ con: } A = \sum m \cdot (y^2 + z^2); B = \sum m \cdot (x^2 + z^2); C = \sum m \cdot (x^2 + y^2)$$

$$\text{y } \sum m \cdot R^2 \sin^2 \theta = I$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G(A + B + C - 3I)}{2r^3} \quad (\text{II.3529})$$

Si ahora se impone la condición de simetría respecto al eje Z, tendremos A=B:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G(2A + C - 3I)}{2r^3} \quad (\text{II.36})$$

Esta expresión debida a Mc Cullagh (1809-1847) nos permite explicitar las variaciones de gravedad entre el polo y el ecuador. Calculemos la gravedad g a partir del potencial V:

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = g_r = \frac{GM}{r^2} + \frac{3G(2A + C - 3I)}{2r^4} \quad (\text{II.37})$$

En el polo: $r=b$ (b: semieje menor del elipsoide que ajusta mejor la forma de la tierra), $C=I$, término de rotación = 0.

En el ecuador: $r=a$ (a: semieje mayor del elipsoide), $A=I$, término de rotación = $-\omega^2 a$.

Por lo tanto a partir de (II.37), en el polo:

$$\gamma_P = \frac{GM}{b^2} + 3G(C - A) \frac{1}{b^4}$$

En el ecuador:

$$\gamma_E = \frac{GM}{a^2} + 3G(C - A) \frac{1}{2a^4} - \omega^2 a$$

La diferencia de gravedad entre el polo y el ecuador será:

$$\gamma_P - \gamma_E = GM \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - 3G(C - A) \left[\frac{1}{b^4} - \frac{1}{2a^4} \right] + \omega^2 a = 5.17Gal$$

El término correspondiente a las diferencias de distancias al centro del planeta es:

$$GM \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = 6.63Gal$$

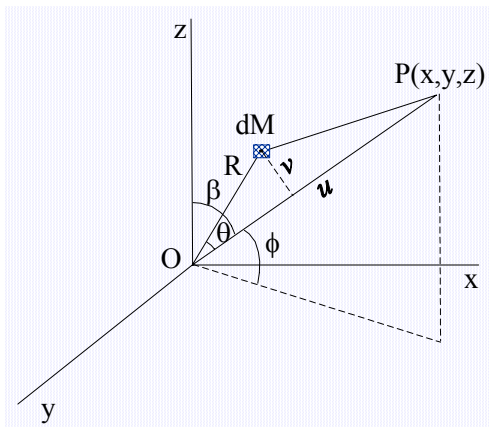
El término correspondiente a la diferencia de masa menos abultamiento ecuatorial es:

$$-3G(C - A) \left[\frac{1}{b^4} + \frac{1}{2a^4} \right] = -4.85Gal$$

El término debido a la rotación es:

$$\omega^2 a = 3.39Gal$$

La expresión (II.37) puede ser convenientemente transformada. En efecto, de acuerdo con la figura. Si expresamos I en función de las componentes alrededor de x,y,z se tiene:



$$\int_M v^2 dM = \int_M [(x^2 + y^2)l^2 + (y^2 + z^2)m^2 + (z^2 + x^2)n^2] dM$$

Siendo l,m,n los cosenos directores de la recta u

$$n^2 = \cos^2 \beta = \sin^2 \varphi = 1 - (l^2 + m^2)$$

$$I = Cn^2 + Al^2 + Bm^2$$

Pero A=B

$$I = Cn^2 + A(l^2 + m^2) = C\sin^2 \varphi + A(1 - \sin^2 \varphi)$$

$$2A + C - 3I = 2A + C - 3C\sin^2 \varphi - 3A + 3A\sin^2 \varphi = (C - A)(1 - 3\sin^2 \varphi)$$

$$\boxed{V = \frac{GM}{r} + \frac{G(C - A)}{2r^3} (1 - 3\sin^2 \varphi)} \quad (\text{II.38})$$

Esta es la expresión del potencial gravitatorio de la Tierra, en aproximación hasta términos en orden r^{-3} , en función de la masa total M y los momentos de inercia C respecto al eje de rotación, y A a un eje ecuatorial.

Derivando respecto de r:

$$\boxed{-\frac{\partial V}{\partial r} = g_r = \frac{GM}{r^2} + \frac{3G(C - A)}{2r^4} (3\sin^2 \varphi - 1)} \quad (\text{II.39})$$

Es una simplificación de la fórmula de Mac Cullagh para un cuerpo axisimétrico, con $C > A$ debido al abultamiento ecuatorial (Turcotte and Schubert, 1982, página 203). Se acostumbra escribir $C - A = J_2 \cdot M \cdot a^2$, con lo que la gravedad newtoniana es:

$$g_r = \frac{GM}{r^2} + \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4} (3\text{sen}^2 \varphi - 1) \quad (\text{II.40})$$

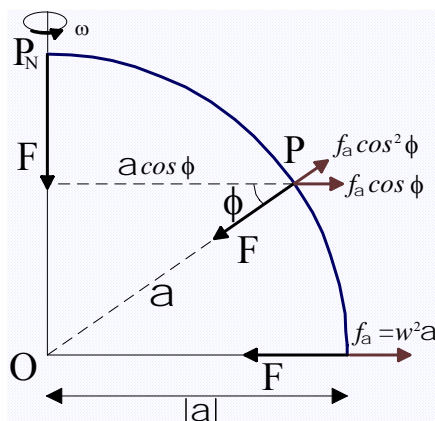
Con $a = 6378,139 \text{ km}$; $G \cdot M = 3,986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$; J_2 (Factor de forma dinámico) $= 1,08270 \cdot 10^{-3}$.

VARIACION DE g CON LA LATITUD (EXPRESIONES INTERNACIONALES)

La gravedad está relacionada con la latitud, en primera aproximación, según la Fórmula de Clairaut (1743):

$$g_\varphi = \gamma = \gamma_a (1 + \beta \text{sen}^2 \varphi) \quad (\text{II.33})$$

Un camino sencillo para obtener una expresión de la forma (II.33) es a partir de la figura (Hosmer, 1930). De acuerdo con ella, en el ecuador la gravedad g_a será la diferencia entre la atracción Newtoniana F y la aceleración axífuga f_a :



$$g_a = F + f_a \quad (\text{II.34})$$

en el polo la gravedad será g_b :

$$g_b = F \quad (\text{II.35})$$

y en un punto P cualquiera de latitud φ :

$$g_\varphi = F - f_a \cdot \cos^2 \varphi \quad (\text{II.36})$$

Figura II.12: Aceleración de la gravedad en un punto P de latitud φ como diferencia entre la atracción Newtoniana F y la componente vertical de axífuga f_a .

Siendo $f_a \cdot \cos^2 \varphi$ la proyección de la fuerza axífuga (más comúnmente denominada centrífuga) en la vertical del punto considerado y que vale $w^2 \cdot a \cdot \cos^2 \varphi$, donde a es el radio y w la velocidad angular del planeta.

Un cuerpo esférico, homogéneo en rotación presenta en el exterior, equipotenciales elípticas. Reemplazando en (II.36) el valor de F deducido en (II.34) se tiene:

$$g_\varphi = g_a + f_a \cdot (1 - \cos^2 \varphi) \quad (\text{II.37})$$

Restando (II.35) de (II.34) y reemplazando en (II.37), sustituyendo $1 - \cos^2 \varphi = \text{sen}^2 \varphi$, tendremos:

$$g_{\varphi} = g_a + \frac{g_b - g_a}{g_a} g_a \cdot \text{sen}^2 \varphi$$

$$g_{\varphi} = g_a (1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \varphi) \quad (\text{II.38})$$

Debemos notar que en esta expresión $\beta = \frac{\gamma^2 a}{g_a}$, mientras en la expresión de Clairaut que admite un aplastamiento terrestre α , β es una función de la rotación terrestre y de α .

Considerando a la tierra como un elipsoide de revolución, la expresión de la forma (II.38) se transforma en la expresión de Clairaut generalizada:

$$\gamma = \gamma_E (1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \varphi - \beta_1 \cdot \text{sen}^2 2\varphi) \quad (\text{II.39})$$

De esta expresión solo la gravedad en el ecuador es obtenida directamente de las observaciones, según Heiskanen (1928):

$$\gamma_E = 978049 \text{mGal}$$

El aplastamiento gravimétrico β se obtuvo en base a la expresión de Clairaut

$$\beta = \frac{g_b - g_a}{g_a} = 0.0052884$$

Mientras que el coeficiente β_1 se dedujo de un elipsoide homogéneo (Somigliana, 1930; Cassinis, 1930):

$$\beta_1 = 0.0000059$$

Estos valores fueron adoptados en el Congreso Internacional de Geodesia y Geofísica reunido en Madrid en 1930. La fórmula teórica internacional toma la siguiente forma:

$$\gamma_{(1930)} = 978049(1 + 0.0052884 \cdot \text{sen}^2 \varphi - 0.0000059 \cdot \text{sen}^2 2\varphi)$$

En 1967 se propuso el siguiente reajuste (Moritz, 1968):

$$\gamma_{(1967)} = 978031(1 + 0.0053024 \cdot \text{sen}^2 \varphi - 0.0000058 \cdot \text{sen}^2 2\varphi)$$

Restando ambas expresiones se obtiene en primera aproximación:

$$\gamma_{(1967)} - \gamma_{(1930)} = (-17.2 + 13.6 \text{sen}^2 \varphi) \text{mGal}$$

Las máximas discrepancias entre ambas fórmulas internacionales son:

$$\varphi = 0; \quad \Delta\gamma = -17.2 \text{mGal}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \Delta\gamma = -3.6 \text{ mGal}$$

Conviene señalar que los valores de gravedad observados vinculados al viejo valor fundamental mundial de Postdam deben ser actualmente corregidos en aproximadamente -14 mGal.

En Argentina el valor fundamental de Miguelete debe ser corregido llevando el viejo valor: 979705.0 mGal a 979690.03 mGal, es decir la corrección será de -14.97 mGal. Los datos están siendo llevados al Internacional Gravity System Network (1971) (I.G.S.N., 1971) en correspondencia con SILAG (Sistema Informativo Latinoamericano de Gravedad) establecido por I.P.G.H. (Instituto Panamericano de Geografía e Historia). Luego, en 1984, el Sistema Geodésico Mundial propuso la siguiente expresión que incluye el efecto de la atmósfera:

$$\gamma_{(1984)} = 978032.67714 \cdot \frac{1 + 0.0019318513639 \text{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \text{sen}^2 \varphi}} \text{ mGal} \quad (\text{II.40})$$

El efecto de la atmósfera es, a nivel del mar, 0.87 mGal mayor que la gravedad que hubiéramos observado allí si la atmósfera no existiera.

La expresión para el aplastamiento geométrico del elipsoide de referencia es

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \text{ y el aplastamiento gravimétrico es } \beta = \frac{g_{\text{Polo}} - g_{\text{Ecuador}}}{g_{\text{Polo}}}.$$

$$\text{Con: } \alpha = \frac{q}{2} + \frac{3}{2} J_2,$$

$$\text{donde: } q = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

$$\beta = 2q - \frac{3}{2} J_2,$$

$$\text{donde: } J_2 = \frac{C - A}{M \cdot a^2}$$

Esta es la célebre fórmula de Clairaut que permite, si la geodesia ha proporcionado el valor del radio ecuatorial a , deducir el aplastamiento de las medidas de g .

El Término $3/2J_2$ fue evaluado a partir de la perturbación secular del movimiento de la Luna. Jeffreys obtuvo: $(1637 \pm 4) \cdot 10^{-6}$ con lo cual el aplastamiento resultó: $\alpha^{-1} = 297,1$.

Sin embargo, los estudios de satélites artificiales han conducido a nuevos valores del término $3/2J_2$ cuyo promedio se determina en $1624 \cdot 10^{-6}$ que proporciona, junto con $q/2 = 1730,72 \cdot 10^{-6}$ y términos de menor influencia no considerados aquí un valor $\alpha^{-1} = 298,2$ lo cual constituye un grosero desacuerdo con los valores antes aceptados.

Las primeras observaciones de irregularidades en las órbitas satelitales han reflejado extensas anomalías gravitacionales en determinadas zonas. Han mostrado una leve forma de

“pera” para el planeta, que implicaría que las tensiones que soportan los materiales terrestres exceden su resistencia; de lo contrario, la forma sería elíptica.

También han puesto de manifiesto grandes irregularidades en el campo gravitatorio (por ejemplo, mínimos en el extremo de las Indias y máximos en Nueva Guinea que parecen coincidir con zonas de alta actividad sísmica).

Variación de la Gravedad con la Latitud

Si la región en estudio no está demasiado extendida en sentido meridiano, podemos calcular el monto de variación de la gravedad en función de la latitud media ϕ_m de la región. En efecto, la variación de gravedad que buscamos es el gradiente de dirección norte. Admitiendo que la Tierra es esférica, tendremos:

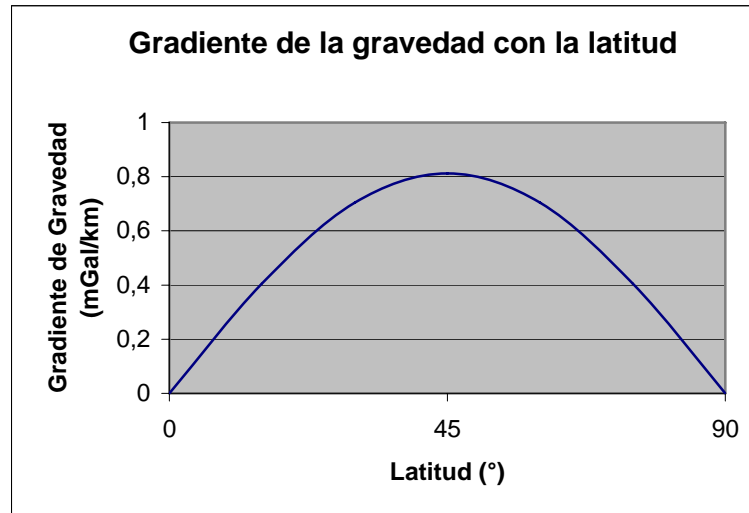
$$G_x = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \phi} = 8.122 \cdot \text{sen} 2\phi \cdot 10^{-9} \text{ c.g.s.} = 8.122 \cdot \text{sen} 2\phi \text{ Eötvös}$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} \approx 0.8122 \cdot \text{sen} 2\phi \cdot \frac{\text{mGal}}{\text{km}} \quad (\text{II.41})$$

En la tabla siguiente se presentan algunos valores de la gravedad normal γ_0 y de la variación de la aceleración de la gravedad correspondiente a distintas latitudes (ϕ), para el IGSN 1930.

Latitud geográfica ϕ en °	Gravedad normal γ_0 en mGal	Aceleración de la gravedad en mGal/km
0	978049,0	0
15	978394,0	0,406
30	979337,8	0,704
45	980629,4	0,812
60	981923,9	0,704
75	982873,4	0,406
90	983221,3	0

Valores según GASSMAN & WEBER (1960).



Los valores máximos de la gravedad normal se observan en los polos debido a la ausencia de la fuerza centrífuga en estos puntos y debido al aplastamiento de la Tierra. Un cuerpo en caída libre en uno de los polos aumenta su velocidad en la dirección vertical más rápidamente que el mismo cuerpo cayendo en el ecuador. Expresado en variaciones de masa un cuerpo de 1g de masa pesa casi 5mg más en los polos que en el ecuador.

GEOMETRÍA DEL CAMPO DE GRAVEDAD

Superficies Equipotenciales y Dirección de la Plomada

El campo gravitatorio puede describirse geoméricamente por superficies de potencial gravitatorio constante (superficies equipotenciales o superficies de nivel):

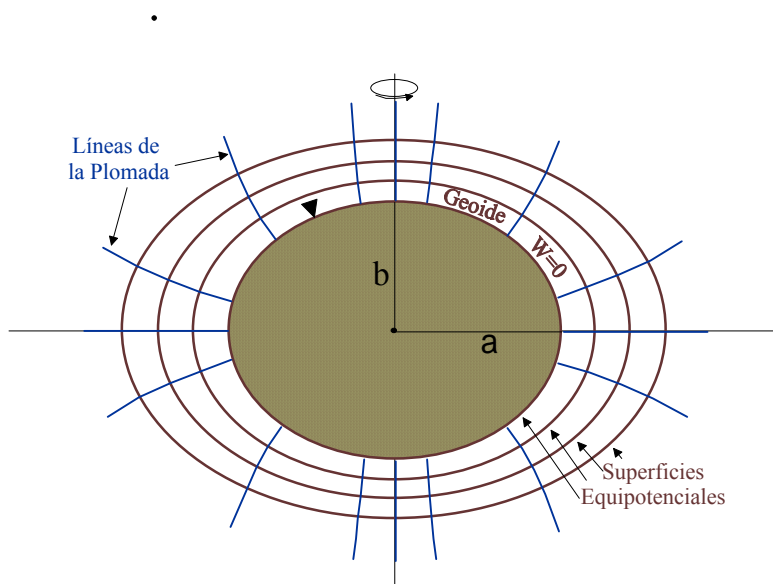


Figura II.18: Superficies equipotenciales y líneas de la plomada de la Tierra en rotación.

$$W(r) = \text{constante},$$

ó

$$dW = 0$$

y por líneas de la plomada.

Se denomina superficie de nivel o equipotencial a una superficie que es normal en todo punto a la dirección de la gravedad.

Si consideramos ahora las trayectorias ortogonales a las superficies de nivel, tendremos las líneas de fuerza del campo gravitatorio. Puede demostrarse fácilmente que las

líneas de fuerza son normales en cada punto a las equipotenciales.

De acuerdo con el concepto de trabajo en un campo gravitacional sobre una equipotencial, se tiene:

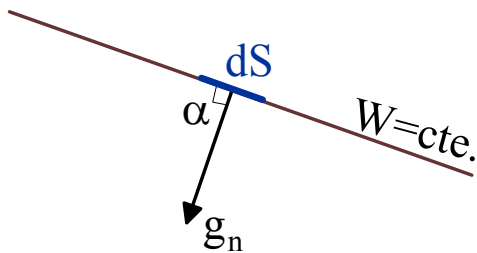


Figura II.19: Línea de fuerza y superficie equipotencial.

$$dW = g_n \cdot ds = g_n \cos \alpha \cdot ds = 0 \quad (\text{II.60})$$

Dado que $g \neq 0$ y $ds \neq 0$, debe ser $\alpha = \pi/2$

Como g varía a lo largo de una equipotencial, la distancia entre equipotenciales debe también variar pero en forma inversa a g . Es por ello que tienden a estrecharse hacia los polos donde la gravedad aumenta.

La relación entre cambios en el potencial y cambios en la posición está dada por:

$$dW = g \cdot dr = g \cdot dr \cdot \cos(g, dr) = 0$$

Con r aumentando desde el centro de la Tierra.

Las líneas de la plomada intersectan a las superficies de nivel perpendicularmente. Si dr coincide con la dirección de la plomada, entonces debido a que $\cos(g, dr) = -1$, se impone la siguiente relación:

$$dW = -g \cdot dr$$

Un aumento en gravedad causa convergencia de las superficies de nivel. La superficie de nivel que se aproxima óptimamente al nivel medio del mar se denomina Geoide. Este sirve de superficie de referencia para definir sistemas de altura.

Gradiente de Gravedad

Cuando se tratan problemas locales, el gradiente de gravedad es de gran importancia. Sus componentes son función de la curvatura del campo gravitatorio terrestre.

La componente de la gravedad en una dirección se obtiene de la derivada parcial del potencial en esa dirección. Como ya vimos, en el sistema global de coordenadas cartesianas el vector total del campo de gravedad será:

$$g_T = \text{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad (\text{II.61})$$

Dado que, en general, se cumple que $\frac{\partial W}{\partial z} \gg \frac{\partial W}{\partial x}$ y $\frac{\partial W}{\partial z} \gg \frac{\partial W}{\partial y}$

en geofísica aplicada se considera que $g \cong \frac{\partial W}{\partial z}$

Diferenciando (II.61) tenemos el tensor gradiente de gravedad o tensor de Eötvös:

$$\nabla g = \text{grad}.g = \text{grad}.(grad.W) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{vmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Notemos que la suma de los términos de la diagonal principal es:

$$\nabla^2 W = \text{div}.\bar{g} = -4.\pi.G.\sigma(z) + 2.\omega^2 \quad (\text{II.63})$$

Donde el primer sumando tiene en cuenta la distribución de masas (Ecuación de Poisson (II.18)) y el segundo sumando el término de la rotación (II.17).

El Campo de gravedad es irrotacional, la matriz solo contiene 5 elementos mutuamente independientes. Estos pueden ser medidos directamente en el espacio exterior, o derivados de las mediciones de la gravedad.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}$$

La tercera fila de la matriz es el *gradiente de gravedad* muy utilizado en la práctica:

$$(\nabla g)^T = \left(\frac{\partial g_z}{\partial x}, \frac{\partial g_z}{\partial y}, \frac{\partial g_z}{\partial z} \right) \quad (\text{II.64})$$

El gradiente puede ser obtenido, por ejemplo, como ya veremos, desplazando el gravímetro en Δx , Δy , Δz sobre los ejes x, y, z, respectivamente. Determinados gradientes pueden ser obtenidos utilizando la histórica balanza de torsión. Finalmente, los gradiómetros de gravedad miden las componentes del vector gradiente.

La componente vertical es de particular importancia para la reducción e interpretación de los datos de gravedad desde (II.63):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - 4.\pi.G.\sigma + 2.\omega^2 \quad (\text{II.65})$$

Este contiene la curvatura media de la superficie de nivel

$$J = -\frac{1}{2g} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

donde $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ describe la torsión del meridiano.

DENSIDAD MEDIA DEL PLANETA

Conociendo el valor de la constante de gravitación universal, que mide la atracción de dos partículas de masas unitarias separadas por la unidad de distancia, la densidad media de la Tierra, que designaremos con σ_T , se deduce en primera aproximación a partir de

$$\frac{F}{m} = g = \frac{G.M_T}{R_m}$$

Siendo M_T la masa terrestre (volumen por densidad media σ_T) R_m el radio medio de la Tierra (6371200 m) y $g=9.80 \text{ m.s}^{-2}$.

La constante geocéntrica gravitacional $G.M$ en primera aproximación es:

$$G.M_T = \frac{20}{3} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_m^3 \sigma_T = 398022 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

El valor adoptado para 1967 que incluye a la atmósfera es: $G.M=398603 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Para σ_T obtendremos un valor de: 5506 kg.m^{-3} o 5.506 g.cm^{-3} , la densidad media de las rocas de la capa superior de la corteza es de solo 2.7 g.cm^{-3} , podemos suponer que la densidad debe aumentar con la profundidad. Pese a que no podemos asegurar cuál es la distribución de densidad en el interior del planeta, las mejores condiciones de estabilidad y rotación exigirán que la densidad aumente con la profundidad.

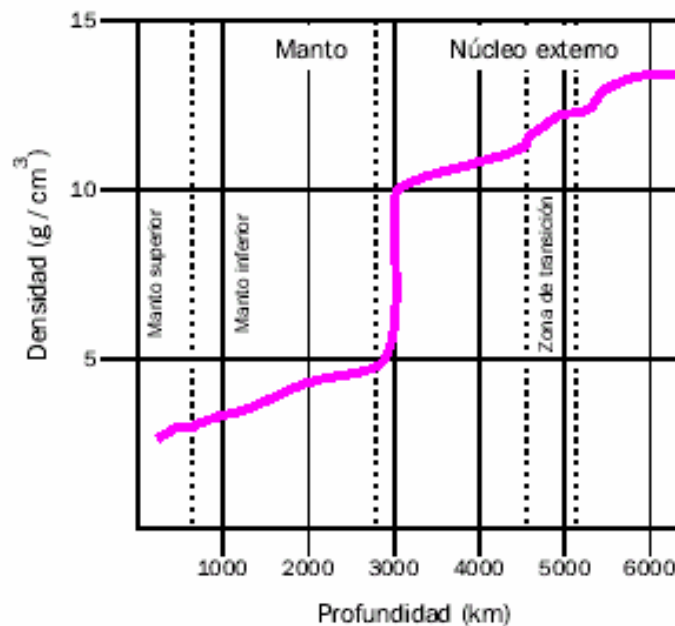


Figura II.20: La figura muestra uno de los modelos de aumento probable de densidad con la profundidad (Bullen, 1963).

FUERZA DE CORIOLIS

Para un cuerpo en movimiento respecto de la Tierra se debe hacer intervenir además de la fuerza centrífuga en el movimiento relativo, una aceleración complementaria de arrastre o fuerza de Coriolis, que es el doble del producto vectorial de la velocidad angular de la Tierra (vector igual a ω y paralelo al eje de los polos) y la velocidad del cuerpo relativa a la Tierra. La disminución aparente de g si v es la velocidad en km/h, φ la latitud y A el acimut (tomado a partir del norte hacia el este) es:

$$4.05.v.\text{sen}\varphi.\text{sen}A + 0.00121.v^2 \quad (\text{II.66})$$

A la latitud de 45° para un navío o submarino que marche a 10 nudos, la gravedad aparente disminuye en 53.5 mGal si marcha hacia el oeste, mientras que se incrementa en 52.6 mGal si se dirige hacia el este. Para un avión que vuela a 500 km/h las correcciones correspondientes son -1734 mGal y 1129 mGal, respectivamente.

Para un cuerpo no arrastrado por la rotación de la tierra, por ejemplo un satélite, no hay que tomar en consideración más que la gravedad y no la fuerza centrífuga.

MEDICIONES DE GRAVEDAD

La gravedad medida en la superficie de la tierra contiene información a cerca de la *ubicación del lugar de medición* (aplicación geodésica de la gravimetría), a cerca de la *distribución de masas* en el interior de la tierra (utilización geofísica de la gravimetría), y en caso de mediciones repetidas, acerca de *variaciones temporales* de la forma de la tierra (utilización geodinámica de la gravimetría).

Los cambios mayores de g (5000 mGal) se deben a diferencias de posición geográfica (ecuador-polos) y de elevación (montañas-profundidades del mar). Las “variaciones regionales” son debidas a masas perturbadoras (desviaciones del modelo simple de la Tierra) localizadas en profundidad: discontinuidad corteza-manto y en corteza superior (500 a 50 mGal, respectivamente). Los efectos periódicos de mareas terrestres son del orden de hasta 0.3 mGal, mientras que los desplazamientos masa terrestre de largo término (movimientos tectónicos, por ejemplo) causan cambios de gravedad del orden de 1 a 0.001 mGal.

Introducción

Dada la gran variedad de instrumental destinado a realizar mediciones de la intensidad de la gravedad “ g ” ó de gradientes de gravedad, en el mar ó desde el aire, no es fácil realizar una clasificación razonablemente completa. Con esta salvedad, haremos sólo un esbozo, demasiado sintético y por ello provisorio, sobre las mediciones de g .

Las *mediciones absolutas de la gravedad “ g ”* se basan en determinaciones de las cantidades fundamentales de la aceleración: distancia y tiempo. Es decir, se observa el movimiento de un censor en el campo gravitatorio terrestre, determinando así el valor absoluto del vector de la aceleración de la gravedad en la estación de medición con mediciones de distancias y tiempos.

En las *mediciones relativas de la gravedad “ Δg ”*, el censor se restringe a detectar directa o indirectamente una de las dos cantidades fundamentales de la aceleración: tiempo o longitud. Es un problema indeterminado el cual es resuelto observando una de las dos cantidades fundamentales en una estación respecto de otra, donde la cantidad no observada se toma como fija. La diferencia de gravedad entre las dos estaciones de observación Δg es computada desde la diferencia observada en tiempo o longitud. Las mediciones relativas de la gravedad se efectúan con instrumentos mucho más económicos que los empleados en determinaciones absolutas de g .

Históricamente las mediciones absolutas de g (determinaciones de g por si mismas) se realizaron, preferentemente, mediante *péndulos* (Borda, 1792; Kater, 1817; Ressel-Repsol, 1860). Casi simultáneamente con las mediciones de Borda, E. Cavendish (1798) determinó por primera vez la constante de gravedad universal G . Los péndulos han sido utilizados también para realizar mediciones relativas (apoyadas en un valor absoluto conocido). Un aparato tripendular fue utilizado por Vening Meinesz para realizar mediciones en el mar (comienzos del siglo XX).

Eötvös (1880) construyó balanzas que han permitido determinar en forma lenta aunque muy precisa gradientes horizontales de g y curvaturas del campo gravitatorio. Actualmente se están poniendo a punto gradiómetros para mediciones en tierra (particularmente en pozos) y desde el aire (en particular desde satélites artificiales). Ellos permiten determinar gradientes

de gravedad con una notable precisión. A partir de estos gradientes se podrá reconstruir el campo g con resoluciones cada vez mayores.

En tierra, las modernas determinaciones absolutas de g se realizan hoy utilizando caída libre. Las notables precisiones en las mediciones de tiempos (10^{-12} seg.) y distancias (10^{-10} m) que se logran en laboratorios de física han hecho posible determinar rápidamente g con precisiones de ± 0.01 mGal y aún mejores.



Figura III.2: Foto de un gravímetro absoluto de caída libre FG5 (ver descripción más abajo).

Las mediciones desde vehículos en movimientos exigen utilizar usualmente plataformas estabilizadoras, adecuados amortiguadores, muy buenos sistemas de posicionamiento geográfico y muy buen control del efecto Eötvös (Para un cuerpo en movimiento respecto de la tierra se debe hacer intervenir, además de la fuerza centrífuga, una aceleración complementaria de arrastre o fuerza de Coriolis, ver este tema en unidad II).



Figura III.3: Gravímetro en plataforma dinámicamente estabilizada en aire o mar. Producto Air-Sea Gravity System II, desarrollado por LaCoste & Romberg.

MEDICIONES ABSOLUTAS DE LA GRAVEDAD

Péndulos

Péndulo matemático:

El método de determinación de g mediante el uso un péndulo se basa en la observación del tiempo de las oscilaciones de una masa en el campo gravitatorio del lugar. En un péndulo matemático (dispositivo ideal) la masa del sistema oscilante se asume concentrada en un punto de masa m , el péndulo de longitud l oscila en un plano vertical entorno del eje vertical del sistema z (dirección de la plomada) o posición de equilibrio. La ecuación de oscilación permite calcular el período de las oscilaciones para pequeños ángulos de oscilación φ :

$$T=2\pi(l/g)^{1/2}$$

De donde se puede despejar la aceleración de la gravedad:

$$g= 4 \pi^2(l/T^2) \quad (\text{III.1})$$

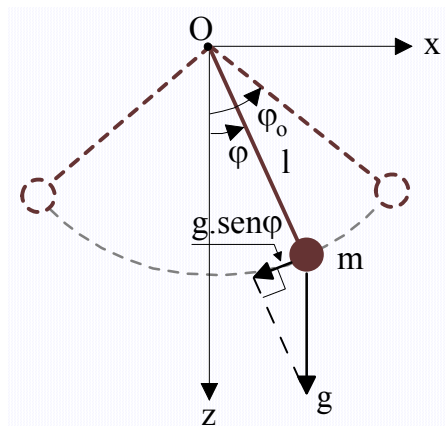


Figura III.4: Péndulo matemático de longitud l , masa m y período propio T_0 .

En la práctica el péndulo matemático es imposible de materializar por lo que se desarrollaron los péndulos físicos que se basan en el mismo concepto pero que eliminan el hilo y su masa no es despreciable. Este tipo de equipos permitió (casi por dos siglos, hasta mediados del siglo 20) efectuar mediciones de campo y laboratorio con precisiones, por entonces, aceptables.

Péndulo Físico:

El péndulo físico es un cuerpo rígido con forma y distribución de masa M arbitrarias, bajo la influencia de la gravedad g , oscila alrededor de un eje horizontal O que no coincide con su centro de gravedad C . Si se desvía el péndulo de la dirección de la plomada (posición de equilibrio) el péndulo oscilará con período T_1 o T_2 según se suspenda del eje O_1 u O_2 .

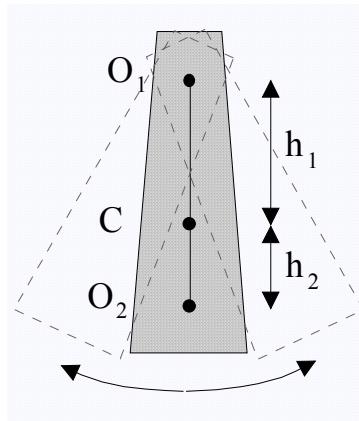


Figura III.5: Péndulo físico.

La expresión del período correspondiente a un péndulo físico de abertura pequeña es:

$$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{l_{eq}}{g}} \quad \text{o} \quad g = 4.\pi^2 \frac{l_{eq}}{T_0^2} \quad (\text{III.2})$$

La longitud equivalente es $l_{eq} = \frac{I}{M.h_1}$

Hay tres parámetros M , l y h_1 que determinar. Se descubrió que si el péndulo tiene dos centros de suspensión O_1 y O_2 con $T_1=T_2$ la longitud equivalente será $O_1.O_2$. Es difícil lograr el isocronismo perfecto: $T_1=T_2$, pero si $T_1 \approx T_2$ se puede emplear:

$$T^2_{\text{sistema}} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \text{término correctivo} \quad (\text{III.3})$$

Donde:

$$T \text{ correctivo} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{2} \quad (\text{III.4})$$

Hoy se logran precisiones muy altas en las mediciones del tiempo y de la distancia. Con ellas podríamos así conseguir precisiones muy altas en las determinaciones de g , del orden de una parte en 10^8 o 10^{-8} .

Por ejemplo, si la gravedad en una estación es $g = 979567,10$ mGal; la precisión de la medición será $979567,10$ mGal / $10^8 \approx 0.01$ mGal.

Existen péndulos portátiles para medir "g". No obstante, este método lidia con muchos problemas operativos. Por ejemplo, a menudo se alude a las deformaciones del péndulo y del soporte durante las mediciones. Además se requieren 15 a 20 minutos para obtener el promedio de T con las precisiones ya señaladas.

Para evaluar las precisiones en g , diferenciemos (III.2): $T^2 = 4.\pi.\frac{1}{g}$;

$$dg = 2.g.\frac{dT}{T} = 2.10^6.10^{-9}\text{seg} = 0.002.\text{mGal}$$

o sea que para un valor de $g \sim 10^6$ mGal y precisiones del nano segundo en la determinación de T (10^{-9} seg), la precisión de la observación será de $dg=0.002$ mGal

$$\text{Si } dI = 0 \text{ y } dT = 0: dg = g \frac{dI}{I} = 10^6 \cdot 10^{-9} \cdot mGal = 0.001 \cdot mGal$$

Desde hace más de tres décadas se ha trabajado en otra dirección, utilizando la caída libre.

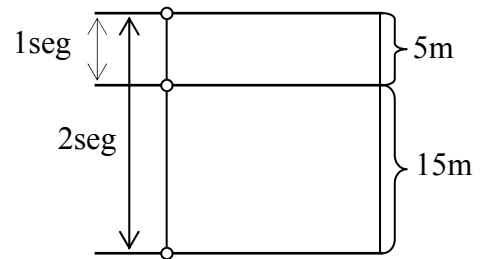
Método de Caída Libre

Recordemos que un cuerpo que cae libremente recorre 5m en el primer segundo, 20m al cabo de 2 segundos (desde el momento en que fue liberado).

$$\text{Esto surge de la ecuación } e = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (\text{III.5})$$

$$5m = \frac{1}{2} \cdot 10m/seg^2 \cdot 1seg^2$$

$$20m = \frac{1}{2} \cdot 10m/seg^2 \cdot 2seg^2$$



$$\text{La expresión (III.5) relaciona } g \text{ con } e \text{ (espacio) y } t \text{ (tiempo); } g = \frac{2e}{t^2} \quad (\text{III.6})$$

En rigor hemos omitido la velocidad inicial v_o de caída.

$$\text{La expresión (III.5) es en realidad } e = v_o t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{III.7})$$

Con v_o : velocidad inicial ó velocidad del cuerpo en el comienzo.

Las distancias se miden con interferómetros de luz láser y como vimos con precisiones de 0.2 nm., mientras que los tiempos se miden con relojes de rubidio con 0.2 ns. de precisión.

La expresión (III.7) es conocida por nosotros desde el colegio secundario. Solo de paso digamos que sale de: $m \cdot z = m \cdot g(z)$. Resolver esta simple ecuación diferencial significa integrarla, determinando las constantes. Se llega así a:

$$\frac{dz}{dt} = g \quad z = \int g dt = g t + c; \text{ si } t=0 \text{ (inicio), } c = \dot{z}_o = v_o$$

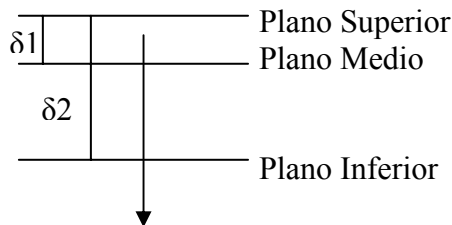
$$z = \int g t dt + \int v_o dt = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

Desde (III.7) se pueden obtener distintas expresiones, con distintos errores relativos. Entonces la forma de las expresiones a utilizar es fundamental.

Usualmente se trabajó con:

$$g = \frac{2}{t_2 - t_1} \left[\frac{\delta_2}{t_2} - \frac{\delta_1}{t_1} \right] \quad (\text{III.8}) \quad \text{y} \quad g = \frac{8s}{t_2^2 - t_1^2} \quad (\text{III.9})$$

Con $s = \delta_2 - \delta_1$. En ambas se eliminó la velocidad inicial v_o que complicaba la ecuación (III.7)



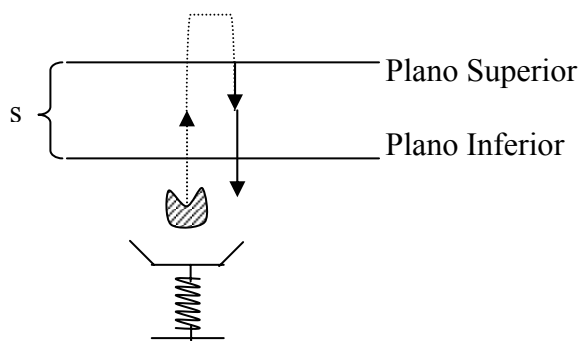
En la expresión (III.8) es necesario determinar por lo menos dos valores del trayecto: δ_1 y δ_2 y los dos intervalos de tiempo correspondientes t_1 y t_2 .

Se hicieron numerosas experiencias. Una de ellas fue lanzar en caída libre una regla de 1 metro de longitud en un tubo (en vacío) de 2.5 metros de largo. La regla tenía una cubierta de emulsión fotográfica.

Para registrar el movimiento de la barra se proyectaba sobre ella la imagen de una ranura iluminada por destellos periódicos de una lámpara. Luego del revelado, se obtuvieron una serie de trazos transversales, cuya distancia entre sí refleja la luz de caída libre. Midiendo la distancia entre los trazos y conociendo el intervalo entre destellos puede determinarse “ g ”.

En virtud de la estructura de (III.8) el error relativo de “ g ” es varias veces mayor que el error relativo de la longitud. [$dl/l = dg/g$].

Es pues conveniente emplear (III.9) dado que en este caso el error relativo de “ g ” es igual que el error relativo de s .



Cómo se trabaja?: Se catapulta un prisma trirrectangular hacia arriba. El prisma atraviesa dos veces, hacia arriba y en caída los planos (superior e inferior).

S es la longitud entre los planos y t_1 y t_2 son los intervalos de tiempo que transcurren al pasar dos veces por el plano superior e inferior respectivamente.

Se lanza el cuerpo verticalmente hacia arriba y anotamos el tiempo que tarda en recorrer determinado trecho del camino en el ascenso y en la caída, subsiguiente. Si s es la longitud del trecho; t_1 , el intervalo de tiempo que transcurre entre las dos veces que pasa el cuerpo por el nivel inferior del trecho, y t_2 , el intervalo de tiempo que tarda en pasar por el nivel superior, la fuerza de la gravedad será (III.9)

MEDICIONES RELATIVAS DE LA GRAVEDAD

Gravímetros (Método estático de medición de g)

Los gravímetros permiten efectuar medidas relativas de la gravedad, son los instrumentos más difundidos hoy en día, por su alta precisión, por la rapidez en las mediciones y economía del instrumento. En general se basan en masas de prueba que penden de resortes.

a) Resortes lineales (Balanza de resorte vertical)

El principio de la balanza de resorte vertical ha sido desarrollado para muchos tipos de gravímetros. Un resorte vertical (enrollado o en espiral) que tiene longitud l_0 sin carga. El campo gravitatorio actúa en la masa m causando una elongación del resorte l , que es el punto donde se logra el equilibrio estático.

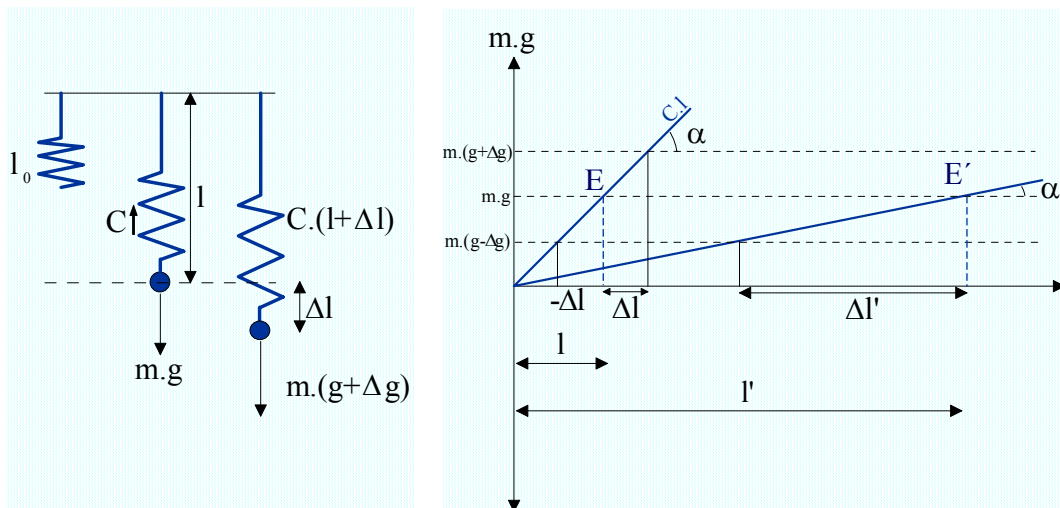


Figura III.7: Izquierda: esquema de sistema de balanza vertical. Derecha: sensibilidad del sistema ante estiramientos $\Delta l'$ para dos resortes con distinta constante de recuperación elástica C .

Pretensando adecuadamente el resorte:

$$l_0 = 0$$

Siguiendo la ley de Hooke el esfuerzo es proporcional a la deformación para pequeñas elongaciones:

$$m.g = C.l$$

$$m.\Delta g = C.\Delta l$$

Donde: l_0 longitud inicial del resorte; C : constante de recuperación elástica del resorte; l : longitud de referencia del resorte; m : masa; Δl : variación de la longitud del sistema elástico de una estación de medición a otra como efecto de la variación del campo gravitatorio Δg .

Un resorte lineal exige disponer de una gran longitud ($l' \gg l$ en la figura de la derecha) para que la sensibilidad dg aumente ($\alpha' \ll \alpha$ ó $[\Delta l'] \gg [\Delta l]$)

El sistema masa-resorte representa un péndulo de resorte simple cuya ecuación de movimiento es:

$$m.z + C.z = 0$$

que tendrá oscilaciones armónicas con amplitud: $z = \Delta l \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi)$, con $\omega_0 = \sqrt{C/m}$ (frecuencia angular propia) y φ : ángulo de fase.

$$\text{El tiempo de oscilación } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} \text{ y } T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l-l_0}{g}}$$

Diferenciando obtenemos la sensibilidad mecánica de la balanza de resorte vertical:

$$\frac{dl}{dg} = \frac{m}{C} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Para un resorte con $l-l_0=0.1\text{m}$ tendremos $T_0=0.6\text{ s}$ y sensibilidad de $dl/dg=0.01\text{ s}^2$. Para evaluar cambios de gravedad con relativa precisión de 10^{-8} (correspondiente a 0.01 mGal) los cambios en la longitud del resorte son de $\pm 10^{-9}\text{ m}$, muy difíciles de medir, aún en laboratorios.

b) Resortes no lineales

Los sistemas astáticos (sistemas de resortes no lineales, rotantes) aumentan notablemente la sensibilidad sin necesidad de disponer de resortes muy largos.

En los sistemas *astatizados*, un incremento en la sensibilidad mecánica del sistema rotacional el cual es causado por aproximar las características de los torques (relación torque T y ángulo de desplazamiento θ) de la fuerza gravitatoria (T_g) y la fuerza del resorte (T_r).

El punto de unión del resorte está ubicado sobre la vertical que pasa por el eje de rotación; el brazo b está inclinado un ángulo θ del orden de 90° (máxima sensibilidad). Cuando la cupla de gravedad aumenta, el resorte se alarga, su tensión aumenta pero la distancia d disminuye. La variación de la cupla antagonista T_r no es lineal. La resultante depende de la geometría del sistema, cambiando adecuadamente la constante C a expensas de la longitud b . El punto de equilibrio E puede ser ajustado de modo de obtener un ángulo α suficientemente pequeño.

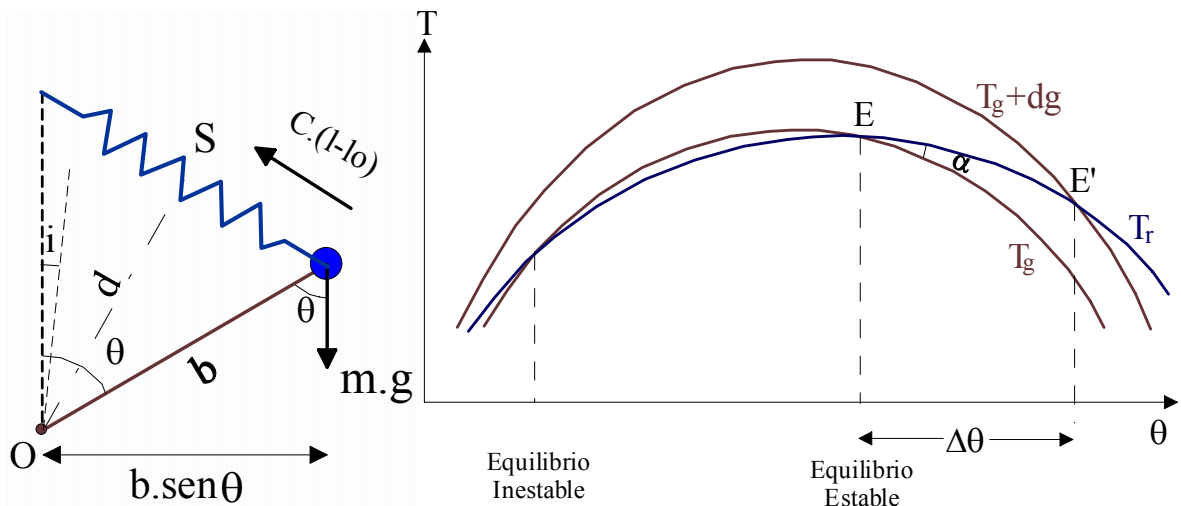


Figura III.8: Izquierda: esquema de sistema astatizado. Derecha: sensibilidad del sistema ante estiramientos $\Delta\theta$ debido a un cambio de gravedad Δg .

Ante un cambio de g (por ejemplo un incremento $+\Delta g$), E se desplaza considerablemente hacia E' garantizando un buen desplazamiento $\Delta\theta$ (gran sensibilidad ó α pequeño).

Utilizando un resorte de longitud cero ($l_0=0$; $i=0$) el par gravitacional será:

$$T_g = m \cdot g \cdot b \cdot \sin \theta$$

El par antagónico del resorte:

$$T_r = C \cdot S \cdot d = C \cdot b^2 \cdot \sin \theta;$$

$$\text{con } S=2 \cdot b \cdot \sin \theta / 2, \quad d=b \cdot \cos \theta / 2 \quad \text{y} \quad \sin \theta / 2 \cdot \cos \theta / 2 = \sin \theta$$

El par resultante será:

$$R = T_g - T_r = (m \cdot g \cdot b - C \cdot b^2) \cdot \sin \theta$$

Diferenciando esta expresión:

$$dR = (m \cdot b \cdot dg - b^2 \cdot dC) \sin \theta + (m \cdot g \cdot b - C \cdot b^2) \cos \theta \cdot d\theta$$

Si $dR=0$ y $dC=0$ (en equilibrio):

$$\frac{d\theta}{dg} = \frac{m \cdot g \cdot b}{C \cdot d^2 - m \cdot g \cdot b} \tan \theta$$

El término de la izquierda se denomina astatización y representa el grado de sensibilidad del sistema. La máxima sensibilidad se consigue cuando $\theta \sim \pi/2$ y $C \cdot d^2 \sim m \cdot g \cdot b$. Ambas condiciones se logran utilizando un resorte de longitud cero, con lo cual se consigue la equivalencia entre $C \cdot b$ y $m \cdot g$ y además se logra balancear la masa en el extremo del brazo horizontal que la sostiene ($\theta \sim \pi/2$).

Acabamos de ver la parte esencial en los gravímetros a resorte. El *sistema masa resorte* que tiene función de censor de la gravedad debe ser acompañado por un *sistema de resorte contador* o de medición que genera el momento equilibrante al generado por el campo gravitatorio. Las propiedades de estos sistemas elásticos son decisivas en la calidad de las mediciones.

Los materiales de los resortes deben tener un módulo de elasticidad E elevado, pequeños coeficientes termo-elástico y de dilatación térmica; pequeña histéresis elástica y pequeña influencia magnética y eléctrica. Para asegurar precisiones aceptables en las mediciones debe aislarse a los sistemas elásticos de: *variaciones de presión* (construcción al vacío), *variación de temperatura* (termostatización o termocompensación), *golpes*, *vibraciones*, *campos magnéticos y eléctricos*, etc.

Otro aspecto a tener en cuenta en los gravímetros es el dispositivo de nivelación ya que se requiere alinear el sistema de medición con la línea de la plomada (el vector g es vertical).

En los gravímetros astatizados la lectura se basa en la observación directa de un puntero luminoso solidario al brazo de palanca del sistema elástico. Con la ayuda de un sistema óptico, la posición del puntero es proyectado como imagen plana en un microscopio de lectura donde se lee sobre una escala graduada. También ese puntero puede hacerse incidir en un espejo de alta reflectividad con lo cual por efecto fotoeléctrico se produce una corriente proporcional a g que puede observarse en un galvanómetro (Groten, 1983).

Gravímetro La Coste and Romberg

Lucien La Coste (1934) ideó un sismógrafo vertical de periodo largo que abrió un nuevo camino para la construcción de gravímetros.

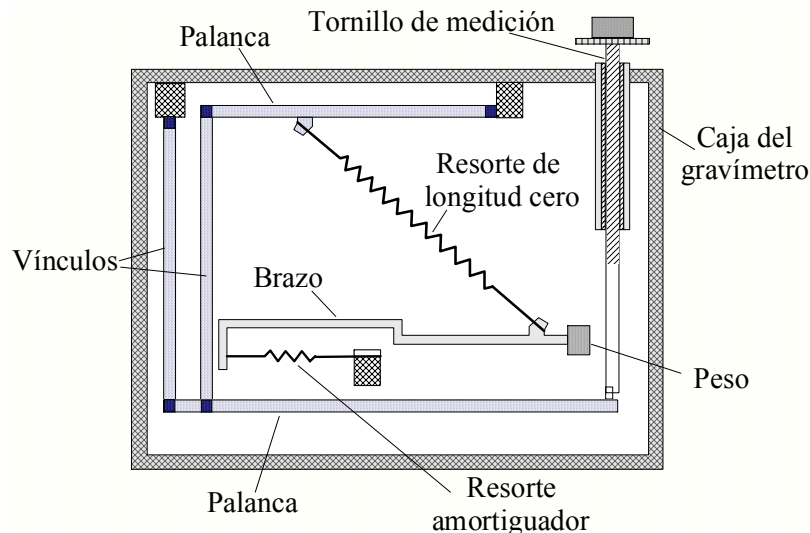


Figura III.9: Esquema de funcionamiento del gravímetro La Coste – Romberg.

Los gravímetros La Coste – Romberg, operan bajo el mismo principio de estatización que acabamos de analizar.

Un peso en el extremo de un brazo horizontal es soportado por un resorte de longitud cero (sistema no lineal). La diferencia de gravedad Δg entre dos estaciones es proporcional a la diferencia de giros y fracción de giros necesaria para llevar en cada estación a la masa (o peso) a su posición cero (nula).

Por casi 40 años los gravímetros La Coste & Romberg han sido los equipos de mayor difusión en geofísica por su precisión (± 0.01 mGal), rango de lectura (7000 mGal), velocidad de lectura (2 o 3 min) y ligereza (5 kg).

En la foto se muestra el nuevo gravímetro La Coste & Romberg provisto con sistema electrónico lineal de haz nulo "Aliod 100". Tiene un rango de 100 mGal con una resolución de 0.01 a 0.001 mGal. No requiere de un operador entrenado para producir lecturas en el tradicional sistema óptico-mecánico, solo se nivela el equipo y libera el

sistema electrónico y se obtienen lecturas digitales de g en mGal. Mediante software incorporado a un dispositivo PalmTM provee las lecturas corregidas por marea luni-solar.



Figura III.10: Foto del gravímetro La Coste & Romberg tradicional actualizado con sistema electrónico de lectura.

c) Sistemas Electrónicos Feedback

Debido a su pequeño tamaño pueden incorporarse circuitos feedback en los gravímetros combinándolos con circuitos capacitivos.

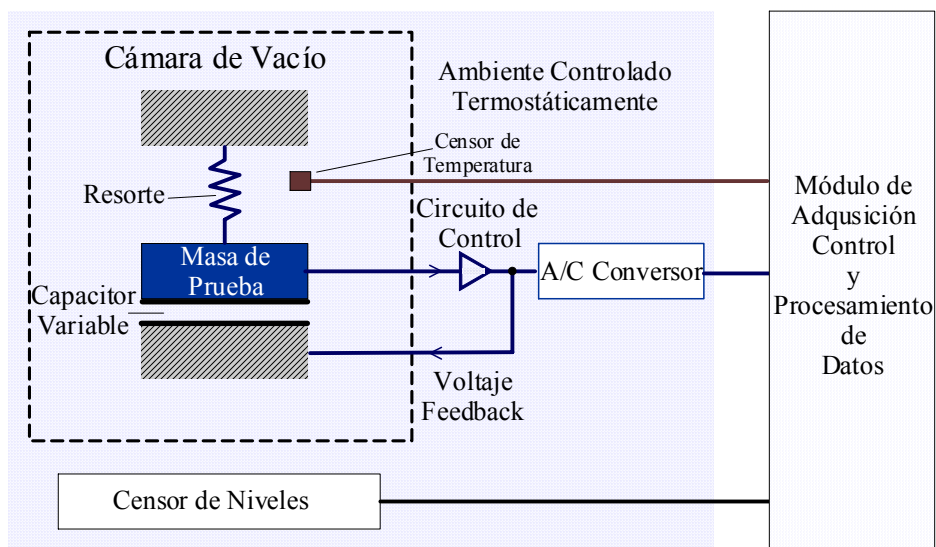


Figura III.11: Esquema de funcionamiento de un gravímetro electrónico automatizado mediante circuito feedback.

La fuerza gravitacional sobre una masa de prueba es balanceada por un resorte y por una pequeña fuerza electrostática de restauración. Un cambio de “ g ” altera la posición de la masa que se traduce en un desplazamiento capacitivo. Un circuito automático de feedback (realimentación negativa) aplica una corriente continua a las placas del capacitor y produce

una fuerza electrostática que lleva a la masa a su posición nula. El voltaje “feedback” es una medida del valor relativo de g . Este voltaje en el sitio de medición es convertido en una señal digital y luego enviado al sector de adquisición de datos para procesamiento; exhibición y almacenamiento.

Gravímetro Scintrex Autograv CG-3

Forma parte de la generación de gravímetros automáticos. Este autogravímetro tiene un rango de lectura directo de 7000 mGal; una resolución de 0.01 mGal; elimina el error del operador realizando lecturas automáticas que son corregidas por mareas terrestres, variaciones de temperatura y defectos de nivelación, y almacena resultados en memoria electrónica.

Teoría De Operación

El elemento sensible del Autograv está basado en un sistema elástico de cuarzo fundido. La fuerza gravitacional en la masa de prueba es balanceada por un resorte y una pequeña fuerza electrostática de restauración. Cuando la posición de la masa, censada por un desplazamiento capacitivo transductor, es alterada por un cambio de gravedad, automáticamente un circuito feedback aplica un voltaje en corriente continua a las placas del capacitor produciendo una fuerza electrostática en la masa que es llevada a su posición de equilibrio. El voltaje feedback, que es una medida del valor relativo de gravedad en el sitio de lectura, es convertido a señal digital y luego transmitida al sistema de adquisición, procesamiento, almacenamiento y exhibición de datos del instrumento.

Es un sistema compacto. Las propiedades elásticas del resorte junto con los límites de oscilación de la masa de prueba permiten operar al instrumento sin fijación.

Los parámetros del sensor y su circuito electrónico son tales que el voltaje de feedback cubre un rango de 7000 mGals, sin reseteo. Tiene una resolución de 0.01 mGal. Ambas cualidades lo hacen apto para mediciones de detalle y para estudios geodésicos regionales.



Figura III.12: Foto de un gravímetro Scintrex Autograv CG-3.

- Los sensores de nivelación son electrónicos, con resolución de 1 segundo de arco. La salida de los sensores son mostradas en la consola y transmitidas al sistema de adquisición y procesamiento de datos. Si el instrumento es operado en una base inestable se pueden hacer correcciones automáticas en tiempo real de nivelación sobre un rango de ± 200 segundos de arco.
- La protección por variaciones de temperatura ambiental es provisto colocando: el sistema elástico, el convertidor digital, componentes electrónicos sensibles y sensores de nivelación dentro de un ambiente de gran estabilidad, doble fase, termostáticamente controlado. No hay compensaciones mecánicas de temperatura. Los cambios externos de temperatura son reducidos en un factor de 10^5 y los pequeños efectos residuales son corregidos por el software usando la salida del sensor en contacto con el resorte principal. El rango de operación del termostato es -40°C a 45°C .
- Todo el mecanismo sensible está encerrado en una cámara de vacío que le da muy buen aislamiento de las presiones atmosféricas. El ambiente estable de operación da al sistema elástico una deriva de largo término predicha con precisión, produciendo correcciones en tiempo real por medio del software, estas son menores que 0.02 mGal/día.

TRANSPORTE DE GRAVEDAD

Hasta hoy las mediciones absolutas de la gravedad son de alto costo económico. Implican el empleo de instrumental caro, pesado, frágil y de muy difícil transporte. Este tipo de equipos solo existe en pocos laboratorios especializados en el mundo. Estas desventajas también son compartidas por los gradiómetros. Además, si bien permiten obtener mediciones completas del tensor de g , pierden resolución por tratarse de equipos montados en satélites que viajan a centenas de km de la superficie terrestre. En los últimos años los gradiómetros montados en aviones o helicópteros han alcanzado precisiones aceptables (± 5 Eötvös) también pierden resolución por volar a varios cientos de metros de altura, contratar una compañía de exploración aero-gravimétrica es una inversión costosa, su principal ventaja es que se toman datos muy cercanos uno de otro cubriendo, rápidamente, áreas que pueden ser inaccesibles por tierra.

Los gravímetros son aparatos económicos, muy fieles (± 0.01 mGal) y de rápida operación (una lectura se realiza en unos de 3 minutos). Permiten medir diferencias de gravedad. En general se trata de “transportar la gravedad” desde un punto en donde se conoce el valor de g con precisión aceptable (por ejemplo, 0.03 mGal de error) a otros puntos (estaciones) donde no se conoce g . Las operaciones de medición requieren mayores cuidados mientras mayores son las precisiones deseadas. A continuación se describen los factores a tener en cuenta en las mediciones de gravedad.

Calibración de gravímetros

Las lecturas de los gravímetros se presentan en subdivisiones arbitrarias de su escala, por lo que se requiere una calibración para expresarlas en mGal. En general, la calibración se lleva a cabo realizando mediciones en lugares de gravedad absoluta o relativa conocida con alta precisión.

Algunos gravímetros pueden calibrarse colocando pequeños pesos. La sensibilidad o número necesario de miligramos para producir una deflexión en la escala se obtiene de un gráfico peso-divisiones de la escala.

Es muy común el método de la inclinación. Inclinando el instrumento decrece el valor medido de la gravedad según el coseno del ángulo de inclinación. Por lo tanto, puede obtenerse una indicación de la sensibilidad de la escala para varios ángulos de inclinación. Los gravímetros La Coste – Romberg permiten ajustes de sensibilidad por este método.

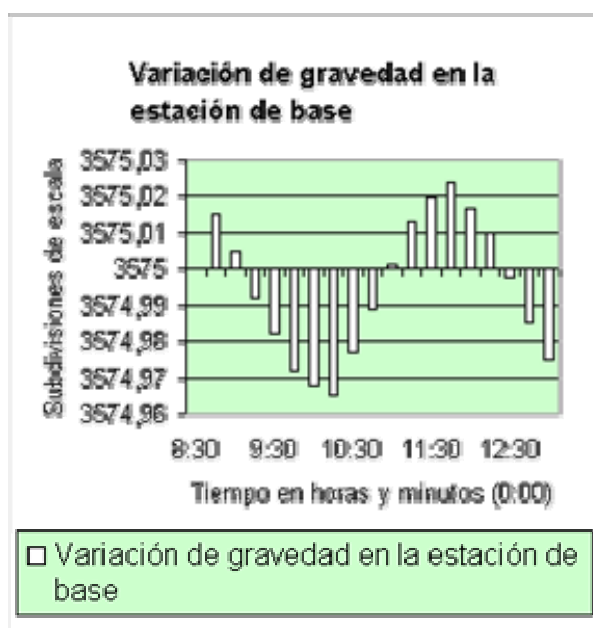
El método más utilizado es realizar lecturas en dos puntos (dos observatorios donde se han hecho determinaciones absolutas de g) con el gravímetro a calibrar y en donde se conoce con exactitud la diferencia de gravedad Δg entre ambas estaciones de calibración. De esta manera se deduce el valor de la constante del instrumento con base en dos medidas solamente. Sin embargo, utilizando un mayor número de estaciones de referencia y repitiendo adecuadamente las mediciones, se logra mayor precisión.

Bases de Control

Las determinaciones relativas de la gravedad necesitan apoyarse en estaciones bases. Las mediciones en dichas estaciones deben hacerse con máximo cuidado, pues un error en tales determinaciones será transportado a todas las estaciones de campo. Desde mediados del siglo pasado existen estaciones base en todo el mundo y redes de calibración de instrumentos. En argentina, por ejemplo, la estación base fundamental es la de Miguelete (vinculada al valor de gravedad fundamental mundial de Postdam).

La calibración de gravímetros debe realizarse entre estaciones base que tengan amplias diferencias de gravedad, del orden de 100 a 500 mGal, de esta manera se disminuyen los errores relativos en las determinaciones.

Corrección por deriva del gravímetro



Cuando se repite una medición por un gravímetro en el mismo lugar y bajo las mismas condiciones varias veces en el día, se obtienen distintas lecturas. Las variaciones pueden llegar a superar la décima de mGal. Estas variaciones se deben a los resortes y fibras de torsión no perfectamente elásticos de los gravímetros, al efecto de la temperatura y a la influencia de las mareas.

La deriva del instrumento se corrige observando los valores de gravedad correspondientes a la estación base en intervalos discretos de tiempo, por ejemplo cada 2 horas y durante el lapso de tiempo en que se realizan todas las mediciones. La primera y la última medición del día se deben realizar siempre en esta estación.

Se grafican las variaciones observadas en la estación base construyendo la curva de las variaciones de gravedad en la estación base en función del tiempo. Se elige un valor como valor de referencia, por ejemplo el primer valor observado en la estación base. Las correcciones por deriva instrumental de los valores medidos son las variaciones de la gravedad con respecto al valor de referencia en la estación base, en los mismos instantes de medición. Se las encuentra por interpolación (corrección=valor interpolado - valor de referencia, en el instante de medición).

Para obtener mediciones gravimétricas de alta precisión se repiten varias veces las mediciones de los puntos vinculados con gravedad, empleándose métodos de ajuste de redes en la determinación de g .

Corrección por mareas

Debido a su alta sensibilidad, los instrumentos de medición de gravedad aptos para la prospección geofísica, responden a la atracción gravitatoria del sol y de la luna y registran las variaciones periódicas en la atracción causadas por los movimientos de la Tierra con respecto al sol y a la luna. Estas fuerzas regularmente alzan y bajan las aguas del mar no rígidas en ciclos mareales previsibles. Las mismas fuerzas actúan en la superficie sólida, deformándola en la misma manera pero en dimensiones más pequeñas. El movimiento real de un punto ubicado en la superficie terrestre puede alcanzar algunos milímetros. Este desplazamiento causa pequeñas variaciones en la gravedad debido a la variación de la distancia con respecto al centro de la Tierra y debido a la redistribución de masas en el interior de la Tierra.

La magnitud de estos cambios varía con la latitud, con el día, el mes y el año en que se realizan las mediciones. El ciclo entero de las mareas está caracterizado por variaciones menores que 0,2 a 0,3 mGal. Su variación media es +/-0,1mGal/día.

La corrección por la influencia de las mareas se puede realizar recurriendo a tablas publicadas regularmente y con anticipación para cada año por ejemplo en el servicio francés Service Hydrographique de la Marine y Compagnie General de Géophysique: Tidal Gravity corrections.

Métodos de Medición

Como dijimos, el fenómeno de deriva (o Drift) instrumental incluye principalmente dos tipos de variaciones. Una debida al envejecimiento y cambios de estado molecular del material de los resortes. Otra originada en la atracción luni-solar. La primera se traduce en recuperaciones elásticas en largos períodos, es incrementada por vibraciones y sacudidas durante el transporte y por imperfecciones del sistema de compensación de temperatura de los instrumentos.

Ambas variaciones son función del tiempo y se suelen englobar en un único efecto llamado deriva total o simplemente deriva. Admitiremos que la deriva es lenta y regular y por tanto puede ser considerada como lineal en cortos intervalos de tiempo (dos horas como máximo). Para realizar la corrección es entonces necesario regresar a la estación de control dentro del plazo en el cual se admite variación lineal (2 horas).

Uno de los métodos de medición más generalizado para eliminar este efecto es el *método del rulo*. Este se emplea en determinaciones precisas de gravedad. Si se desea medir los valores de gravedad en las estaciones: A, B, C,, etc. Se procede como muestra la figura:

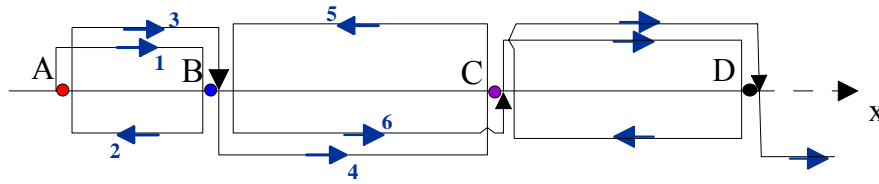


Figura III.15: Esquema de avance de las mediciones por el método del rulo.

Se mide el valor de g en la estación A (L_A) en el tiempo t_A , luego se lee el valor de la gravedad en la estación B (L_B) en el tiempo t_B , a continuación se repite la medición en A L'_A en el tiempo t'_A y el valor de L'_B en t'_B para recién entonces avanzar a la estación C, repitiéndose el mismo procedimiento (B-C-B-C-D..., Figura III.15). De esta manera se tiene en un diagrama lecturas relativas versus tiempos (Figura III.16):

Conocido el valor de la gravedad en la estación A (g_A) el valor de la gravedad en B se obtiene transportando el valor de la gravedad, es decir:

$$g_B = g_A + \Delta g_{B-A} \quad (\text{III.10})$$

Donde, por el método del rulo, Δg_{B-A} se obtiene interpolando el valor de una lectura al instante de medición de la otra:

$$\Delta g_{B-A} = L_B - (L_A + C1) \quad (\text{III.11})$$

$$C1 = \frac{(L'_A - L_A)}{(t'_A - t_A)} (t_B - t_A) \quad (\text{III.12})$$

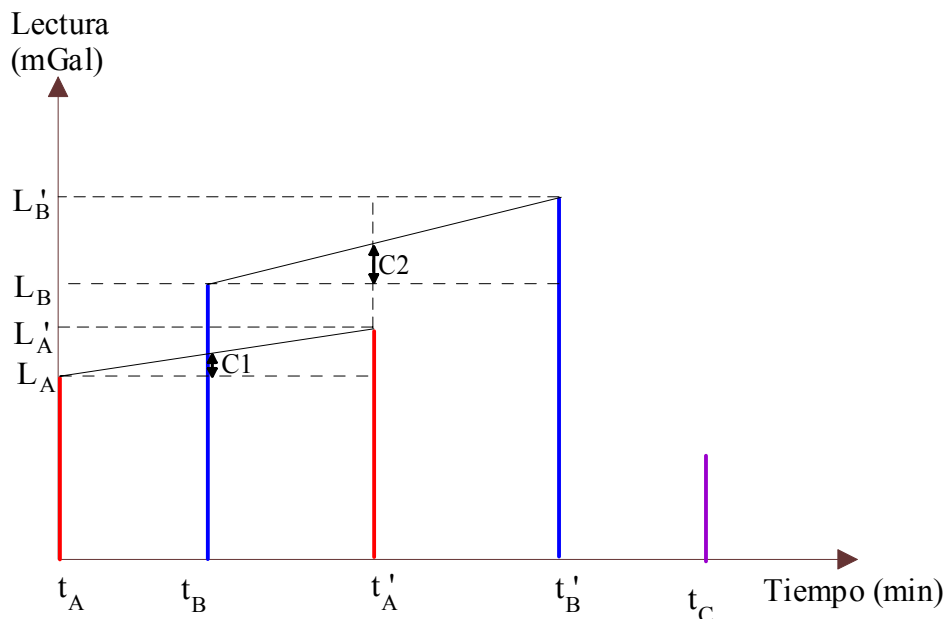


Figura III.16: Diagrama lecturas relativas versus tiempos por el método del rulo.

Además podemos llevar L_B al tiempo de L_A' mediante la corrección C2:

$$\Delta g_{B-A2} = (L_B + C2) - L_A' \quad (\text{III.13})$$

$$C2 = \frac{(L_B' - L_B)}{(t_B' - t_B)} (t_A' - t_B) \quad (\text{III.14})$$

Finalmente, por el método del rulo, la diferencia de gravedad entre la estación A y B será el promedio de Δg_{B-A1} y Δg_{B-A2} :

$$\Delta g_{B-A} = (\Delta g_{B-A1} + \Delta g_{B-A2}) / 2 \quad (\text{III.15})$$

Se podrán promediar tantos Δg_{B-A} como repeticiones del rulo se efectúen.

El método del rulo simple economiza tiempo obteniendo un control de deriva por estación (una repetición por estación: A-B-A-C-B-D-C-E ...), ver Figura III.17.

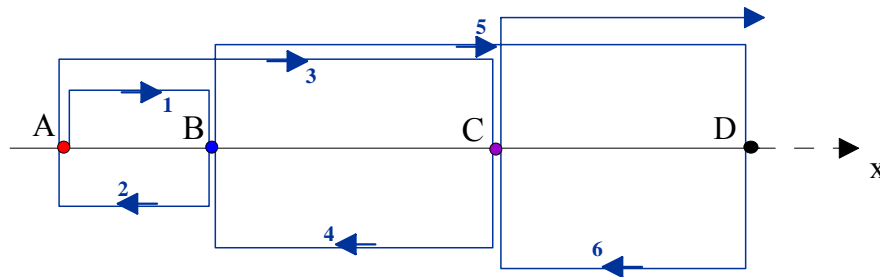


Figura III.17: Esquema de avance de las mediciones por el método del rulo simple.

De esta manera se transporta la gravedad a las estaciones B, C, D, ..., mediante las expresiones (III.10), (III.11) y (III.12).

Puede suceder que las precisiones deseadas no hagan necesario el empleo del rulo doble o simple, o que dentro de las 2 horas en que consideramos lineal la deriva instrumental se puedan realizar varias mediciones:

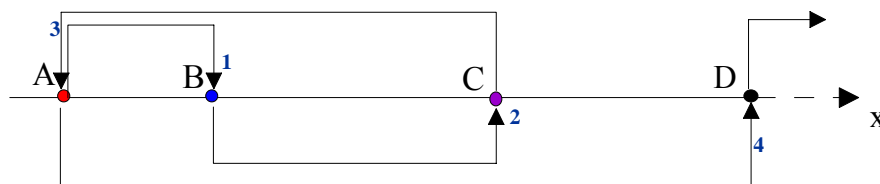


Figura III.18: Esquema de avance de las mediciones con repeticiones en una estación base.

Donde:

$$C_{BA} = \frac{(L_A' - L_A)}{(t_A' - t_A)} (t_B - t_A), \quad C_{CA} = \frac{(L_A' - L_A)}{(t_A' - t_A)} (t_C - t_A), \text{ etc.}$$

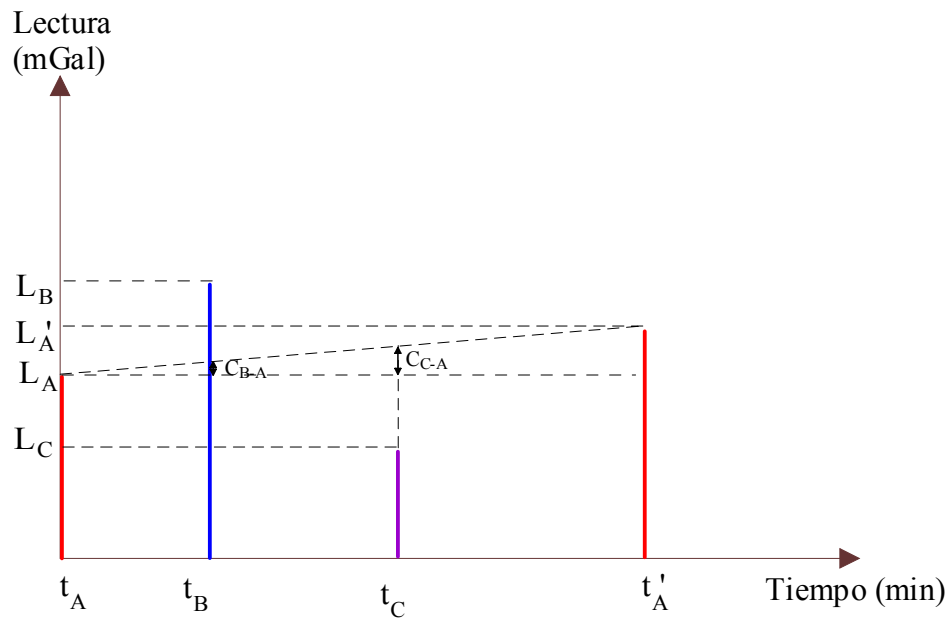


Figura III.19: Diagrama lecturas relativas versus tiempos por el método de la base.

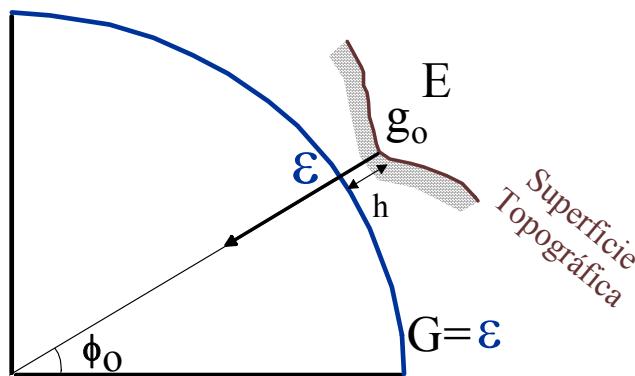
La gravedad en cada estación se obtiene mediante (III.10).

ANOMALÍAS GRAVIMÉTRICAS

Nuestro planeta es una esfera aplastada, que gira alrededor de su eje de revolución, presentando una superficie topográfica irregular.

Los valores de gravedad medidos sobre la superficie topográfica irregular de nuestro planeta, no pueden ser directamente comparados entre sí, dada la desigual influencia de la rotación, altitud y masas.

Se pensó así, en transportar los valores observados mediante adecuadas reducciones a una misma superficie de referencia, y compararlos allí con valores teóricos obtenidos para las respectivas estaciones. Se suele considerar como superficie de referencia al geoide. Definido como la equipotencial determinada por las aguas medias de los mares en equilibrio prolongada por debajo de los continentes.



g_0 : gravedad observada

G: geoide

ϵ : elipsoide

ϕ_0 : latitud

En una primera aproximación supondremos que el geoide y el elipsoide coinciden.

Supongamos haber determinado la gravedad g_0 en la estación E sobre la superficie topográfica. En intersección del elipsoide y la vertical que pasa por ϵ , de latitud ϕ_0 tendremos un valor γ_0 deducido de acuerdo a una expresión teórica (II.39 y II.40).

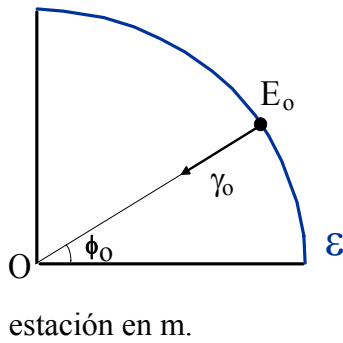
Para poder hacer la comparación se transporta el g_0 a la superficie de referencia, pues tanto el valor teórico γ_0 como el valor observado g_0 están a distintas altitudes.

Al efectuar la comparación entre los dos valores (observacional reducido y teórico), obtendremos discrepancias. Estas serán las anomalías gravimétricas:

$$\text{Anomalías gravimétricas} = \text{gravedad observada y reducida } (g_0) - \text{gravedad normal } (\gamma_0)$$

REDUCCIÓN DE AIRE LIBRE (o de Faye)

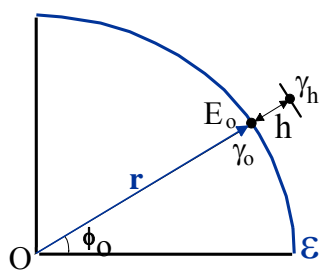
Supongamos una estación E_0 con un valor de gravedad γ_0 sobre una tierra esférica. La variación de gravedad con la altura se expresa en primera aproximación como:



$$\frac{\partial \left(\frac{G.M}{r^2} \right)}{\partial r} = -2 \frac{G.M}{r^3} = -2 \frac{\gamma_0}{r} \quad (IV.1)$$

Si tomamos $\gamma_0 = 980000$ mGal, $r = 6371 \cdot 10^3$ m, la corrección por altura toma el valor: $0.308.h \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$, con h altitud de la estación en m.

Si consideramos ahora la gravedad γ_h sobreelevada un cierto h sobre E₀ se tendrá que la reducción de Aire libre será:



$$\gamma_h = \frac{G.M}{(r+h)^2} = \frac{G.M}{r^2} \left(1 + \frac{h}{r} \right)^{-2} \quad (IV.2)$$

desarrollando la serie

$$\gamma_h = \gamma_0 \left(1 - 2 \frac{h}{r} + 3 \frac{h^2}{r^2} - \dots \right)$$

$$\gamma_h - \gamma_0 = 2 \frac{\gamma_0}{r} . h \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{r} + \dots \right) \cong 0.308.h - 0.073.H^2$$

o más precisamente:

$$\gamma_0 - \gamma_h = +0.3086. h - 0.073.H^2 \quad (IV.3)$$

(con h altitud de la estación en m y H altitud de la estación en km)

La influencia del segundo término es significativa para regiones de fuerte cota.

Para obtener más precisión será necesario derivar la expresión de gravedad obtenida para el elipsoide de referencia (II.39 o II.40).

Algunos autores consideran que los valores de gravedad no deben ser reducidos hacia abajo al geode dado que las densidades de las masas subterráneas son desconocidas.

Es perfectamente lógico realizar la reducción hacia arriba con:

$$\gamma_h - \gamma_0 = - \frac{\partial g_0}{\partial h} . h$$

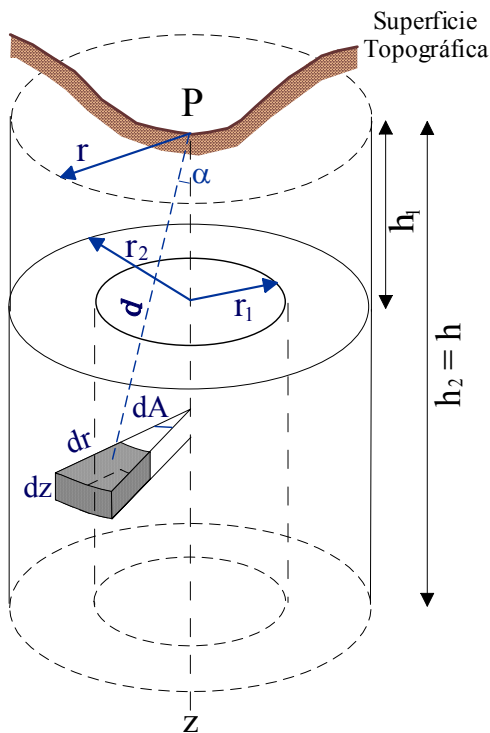
$$\gamma_h = \gamma_0 - 0.3086.h$$

$$\text{Corrección de Aire Libre} = \text{CAL} = -0.3086 \frac{\text{mGal}}{\text{m}} \cdot h \quad (\text{IV.4})$$

Para conocer con precisión el gradiente vertical de la gravedad en un lugar, se lo puede obtener desplazando el gravímetro hacia arriba de la estación.

REDUCCION POR MASA (fórmulas auxiliares)

En la reducción anterior (aire libre) se tuvo en cuenta sólo el efecto de la altitud sobre el valor de la gravedad observada. En la reducción por masa se considera el efecto que origina sobre la gravedad el exceso o defecto de masas entre el nivel del mar y la superficie topográfica.



Para determinar el valor de la reducción comenzamos considerando la atracción que ejerce sobre un punto P de la superficie terrestre, un trapecio circular elemental del interior de la corteza terrestre.

La atracción vertical entre P y el diferencial de masa dm será:

$$dg' = \frac{G \cdot \sigma \cdot dv}{d^2} \cdot \cos \alpha$$

con: $dm = \text{densidad} \cdot \text{diferencial volumen} = \sigma \cdot dv$

$$dg' = \frac{G \cdot \sigma \cdot dA \cdot z \cdot dz \cdot r \cdot dr}{\left[(z^2 + r^2)^{3/2} \right]} \quad (\text{IV.5})$$

σ : densidad del cilindro

Integrado entre 0 y 2π , para dA ; r_1 y r_2 , para dr y entre h_1 y h_2 , para dz , obtendremos:

$$g' = G \cdot \sigma \cdot \int_0^{2\pi} dA \int_{h_1}^{h_2} z \cdot dz \int_{r_1}^{r_2} \frac{r \cdot dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (\text{IV.6})$$

$$g' = G \cdot \sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_2^2}} \right) \cdot z \cdot dz$$

$$g' = 2\pi \cdot G \cdot \sigma \left(\sqrt{r_1^2 + h_2^2} - \sqrt{r_1^2 + h_1^2} - \sqrt{r_2^2 + h_2^2} + \sqrt{r_2^2 + h_1^2} \right) \quad (\text{IV.7})$$

Esta expresión solo tiene validez si h_1 y h_2 tienen el mismo signo. De lo contrario y como dichos valores son cuadráticos, dará el mismo valor tanto si los compartimentos están por encima o por debajo de la estación de gravedad. En este caso se deben considerar los efectos por encima y por debajo de la estación por separado. Si se trata de una fracción n de 2π , g' deberá dividirse por n .

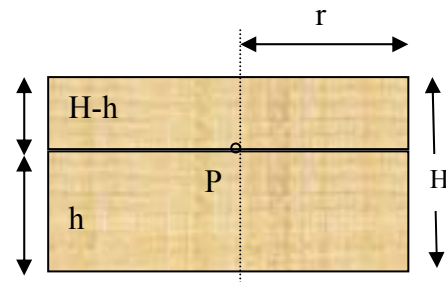
Para el cálculo de la gravedad en un punto interior P del eje del cilindro, descomponemos el cilindro de altura H en 2 cilindros de altura h y $(H-h)$.

Para el cilindro superior desde (III.7) y con $r_1=h_1=0$;
 $r_2=r$; $h_2=h$, se tiene:

$$g_s = 2\pi.G.\sigma\left[r + H - h - \sqrt{r^2 + (H - h)^2}\right]$$

Para el cilindro inferior:

$$g_i = 2\pi.G.\sigma\left[r + h - \sqrt{r^2 + h^2}\right]$$



Sumando algebraicamente ambos efectos tendremos el efecto gravitatorio de ambas capas cilíndricas g_p :

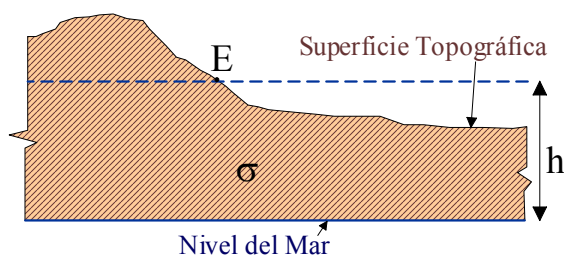
$$g_p = 2\pi.G.\sigma\left[2h - H - \sqrt{r^2 + h^2} + \sqrt{r^2 + (H - h)^2}\right] \quad (\text{III.8})$$

REDUCCIÓN SIMPLIFICADA DE BOUGUER

En la reducción de Bouguer, se considera el efecto que origina sobre la gravedad, la masa interpuesta entre el nivel del mar y la estación considerada, en la hipótesis de que ésta masa es una losa plana horizontal indefinida de espesor h y densidad 2.67 g/cm^3 .

Las elevaciones y depresiones comprendidas entre la superficie topográfica y el plano horizontal superior, que limita a la losa y que pasa por la estación E, hacen imprecisa la reducción.

Es necesario realizar una corrección adicional, llamada reducción topográfica complementaria, que ya veremos, para compensar estos efectos.



Si hacemos en las integrales que nos dan g' (4.6): $r_1=0$; $r_2 \rightarrow \infty$; $h_1=0$ y $h_2=h$ tendremos el efecto de la losa plana indefinida:

$$g' = 2\pi.G.\sigma \int_0^h \frac{z dz}{z} = 2\pi.G.\sigma.h \quad (\text{III.9})$$

La corrección será sustractiva cuando eliminemos el exceso de masa por sobre el geode, y aditiva en caso contrario:

$$g' = -0.0419 \cdot \sigma \cdot h$$

El valor más usual de la corrección de Bouguer, considerando en la expresión anterior la densidad media de las rocas por encima del nivel del mar $\sigma = 2.67 \text{ g/cm}^3$ será:

$$g' = -0.1118 \cdot h \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$$

$$\text{CORRECCION DE BOUGUER} = \text{CB} = -0.1118 \frac{\text{mGal}}{\text{m}} \cdot h \quad (\text{III.10})$$

Sin embargo, en exploraciones de rocas superficiales, se suele reemplazar la densidad 2.67 g/cm^3 por la densidad de la zona en estudio. Admitiendo la densidad de 2.67 g/cm^3 , ambas correcciones por altitud y masa pueden combinarse en una sola:

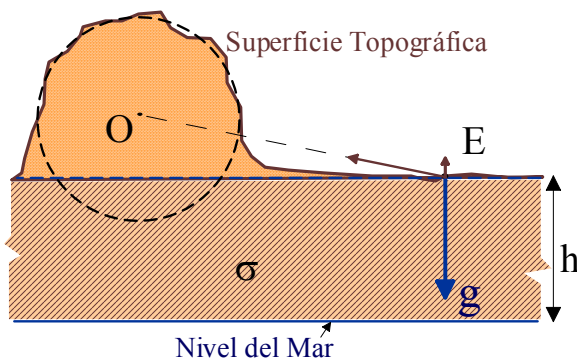
$$\begin{aligned} \text{Corr A1} &= +0.3086 \cdot h \\ \text{Corr B} &= -0.1118 \cdot h \\ \text{Corr A1,B} &= +0.197 \cdot h \cdot \text{mlg/m} \end{aligned}$$

REDUCCIÓN TOPOGRÁFICA COMPLEMENTARIA

En la corrección de Bouguer se despreciaron en una primera aproximación las irregularidades topográficas cercanas. Sólo si se trabaja en zonas llanas y planicies, la corrección por masa tal como lo planteó Bouguer es correcta, de lo contrario deberemos tener en cuenta las irregularidades del terreno en una corrección complementaria que llamamos topográfica. El signo es siempre aditivo. La corrección será siempre positiva, se trate de elevaciones o depresiones.

Si se trata de una colina o elevación, las masas sobrepuestas a la losa, producen una sollicitación contraria a la gravedad. Si haciendo un análisis cualitativo consideramos la sobre-elevación como asimilada a una esfera, podemos concentrar la masa en el centro O.

Descomponiendo entonces la atracción según E0 en dos direcciones, horizontal y vertical, tenemos que esta última componente es de signo contrario a la gravedad. Por tanto la corrección será del mismo signo que g, o sea aditiva.



Tomemos ahora una depresión o un valle. En este caso la corrección vuelve a ser aditiva puesto que en la reducción de Bouguer, el valle fue ocupado por mas que en realidad no existen, originando un exceso negativo que debe ser eliminado mediante una corrección aditiva.

En síntesis, la corrección será siempre positiva, se trate de elevaciones o depresiones.

La aplicación de esta corrección exige el conocimiento de la topografía alrededor de la estación. Una forma práctica de hacerla consiste en subdividir el terreno en una serie de cilindros concéntricos con centro en el punto de observación (estación) y radios variables, quedando el terreno circundante dividido en sectores circulares. A cada uno de estos sectores se le asigna la altitud media medida sobre el mapa topográfico y se le resta la altitud de la estación obteniendo Δh . De esta forma quedan definidos una serie de sectores cilíndricos, cuya atracción de sus masas respectivas nos darán el valor de las correcciones buscadas, expresión (III.12). (Existe software apropiado, y tradicionalmente se usaron platillas con las correcciones tabuladas, la más difundida fue la plantilla de Hammer).

Si en la expresión (III.7) hacemos $h_1=0$, $h_2=\Delta h$, y subdividiendo 2π en n partes iguales, se tendrá:

$$g_T = \frac{2\pi}{n} \cdot G \cdot \sigma \left(r_1 - r_2 + \sqrt{r_1^2 + \Delta h^2} - \sqrt{r_1^2 + h_1^2} - \sqrt{r_2^2 + \Delta h^2} \right) \quad (\text{III.12})$$

ANOMALIAS DE AIRE LIBRE Y BOUGUER

Si a la gravedad observada g_0 la corregimos solo por aire libre y la comparamos con el valor teórico γ_0 obtendremos la anomalía de aire libre AAL:

Anomalía de Aire Libre = g observado y reducido por AL - γ_0

La expresión clásica será:

$$\text{AAL} = g_{\text{obs}} - \gamma_0 + 0.3086 h \quad (\text{III.13})$$

Si hacemos la hipótesis de una topografía hueca entre el relieve terrestre y el nivel del mar y por debajo del nmm consideramos una distribución homogénea de masas, las reducciones de Bouguer y topográficas serían nulas.

Si ahora corregimos el g observado, por Aire Libre, Bouguer y topografía:

Anomalía de Bouguer = g obs. reducido por AL, B y topografía - γ_0

Cuando:

NO se efectúa la corrección topográfica tendremos la Anomalía simple de Bouguer, su fórmula clásica es:

$$\text{AB} = g - \gamma_0 + (0.3086 - 0.1118) h \quad (\text{III.14})$$

SI se efectúa la corrección topográfica C_T tendremos: Anomalía modificada de Bouguer:

$$\text{AB} = g - \gamma_0 + [(0.3086 - 0.1118) \cdot h + C_T] \quad (\text{III.15})$$

Una AB próxima a 0, puede indicar que se han efectuado las correcciones por masa suponiendo una densidad (σ) correcta desde la superficie topográfica al nivel del mar, y además que σ varía uniformemente por debajo de dicho nivel.

Por el contrario, si la AB fuera mayor o menor podría indicar, o bien una falta de uniformidad en la distribución de σ por debajo del geode, o un σ por sobre el nivel del mar distinto a el supuesto para realizar la corrección.

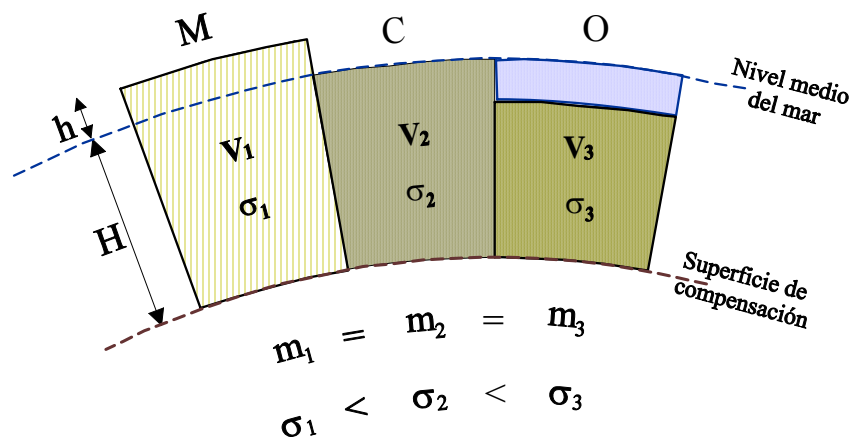
ISOSTASIA

Calculadas las anomalías de Bouguer en numerosos puntos del planeta, se comprobó que en general difieren de cero salvo en regiones costeras. En áreas continentales elevadas, son generalmente negativas y en cuencas oceánicas positivas. Estos resultados indican claramente una deficiencia de densidad en zonas sobre elevadas respecto al nivel medio del mar, un exceso de densidad debajo de los fondos oceánicos y una densidad sensiblemente igual a la esperada en regiones cercanas al mar. Por tanto, la corteza no se comporta en forma rígida. Las teorías isostáticas explican este singular comportamiento y justifican las desiguales reparticiones de densidades.

REDUCCION ISOSTATICA EN LA HIPOTESIS DE PRATT

En el sistema de Pratt (1855) se considera que a una cierta profundidad fija H (profundidad de compensación), existiría una base por encima de la cual las masas serían iguales en todas partes.

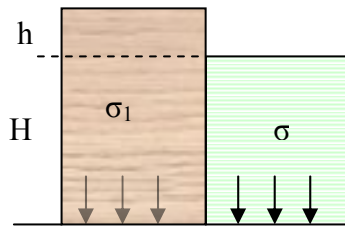
La compensación comenzaría en la superficie misma de la tierra, bajo los océanos en el fondo del mar, y terminaría a una profundidad H del orden de 100 Km. por debajo del geode.



En términos generales podemos decir que para conservar la misma presión a una profundidad de 100 km., las columnas verticales sobre ese nivel deben contener la misma cantidad de masa.

Supongamos tener ahora 2 bloques rectangulares de igual sección que descansan sobre una superficie de compensación ubicada a una profundidad H sobre el geode.

La igualdad de presiones en la base de la columna puede expresarse como:



$$p = \int_{-H}^h \sigma(z) g dz = cte \quad (\text{III.16})$$

Dado que los cambios de g son pequeños en las columnas se tendrá en el concepto de Pratt:

$$\int_{-H}^h \sigma_1 dz = \int_{-H}^0 \sigma dz$$

σ_1 : densidad de la columna sobreelevada en un valor h

σ : densidad de la columna normal

integrando: $\sigma_1(H+h) = \sigma H$

$$\text{siendo: } \sigma_1 = \sigma \cdot \frac{1}{1 + (h/H)} = \sigma \left(1 - \frac{h}{H} + \frac{h^2}{H^2} - \dots \right) \quad (\text{III.17})$$

Si despreciamos las potencias mayores que uno, cuando h es pequeño:

$$\sigma_1 = \sigma - \sigma (h/H)$$

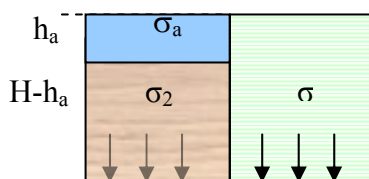
La densidad de compensación σ_c que debe tener el bloque sobreelevado respecto al bloque de comparación al nivel del mar, será:

$$\sigma_c = \sigma - \sigma_1 = \sigma (h/H) \quad (\text{III.18})$$

Si $\sigma = 2.67 \text{ g/cm}^3$, $h=1 \text{ Km}$, $H=100\text{km}$, $\sigma_c = 0.0267 \approx 0.03 \text{ g/cm}^3$

Estos valores como veremos después son del orden de las deficiencias de gravedad que producen los procesos de calentamientos litosféricos.

Para un bloque suboceánico:



$$H \cdot \sigma = \sigma_a \cdot h_a + \sigma_2 \cdot (H - h)$$

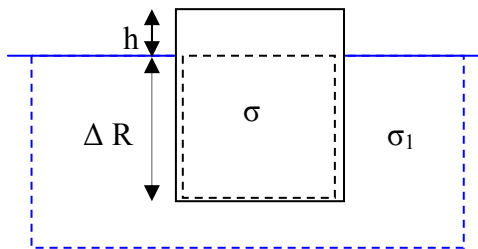
$$\sigma_2 = \frac{\sigma \cdot H - \sigma_a \cdot h_a}{H - h_a} \quad (\text{III.19})$$

Y la densidad de compensación será:

$$\sigma_c = \sigma_2 - \sigma = \frac{\sigma \cdot H - \sigma_a \cdot h_a}{H - h_a} - \sigma = (\sigma - \sigma_a) \frac{h_a}{H - h_a} = 1.643 \frac{h_a}{H - h_a} \quad (\text{III.20})$$

con $\sigma_a = 1.027 \text{ g/cm}^3$, $\sigma = 2.67 \text{ g/cm}^3$.

REDUCCION ISOSTATICA EN LA HIPOTESIS DE AIRY



La hipótesis de Airy (1855) consiste esencialmente en suponer que cada trozo de corteza está en equilibrio hidrostático. Cuanto más alta es la montaña, más profundamente hunde sus raíces en el manto. Todo pasa como si cada prisma vertical elemental que se pudiera cortar en la corteza terrestre, flotara en un material viscoso que le permitiera realizar lentos movimientos verticales.

Supongamos un bloque de densidad σ flotando hidrostáticamente en un líquido de densidad $\sigma_1 > \sigma$.

$$\sigma (\Delta R + h) = \sigma_1 \Delta R$$

$$\Delta R = \frac{\sigma}{\sigma_1 - \sigma} \cdot h \quad (\text{III.21})$$

La diferencia fundamental entre los dos sistemas vistos está dada porque mientras en la hipótesis de Pratt, la densidad de compensación varía con la altitud en tanto permanece constante la profundidad de compensación, en el sistema de Airy, la densidad se mantiene, variando en cambio la profundidad. Al tratar los mecanismos de elevaciones orgánicas completaremos este tema.

Sistema de Airy-Heiskanen

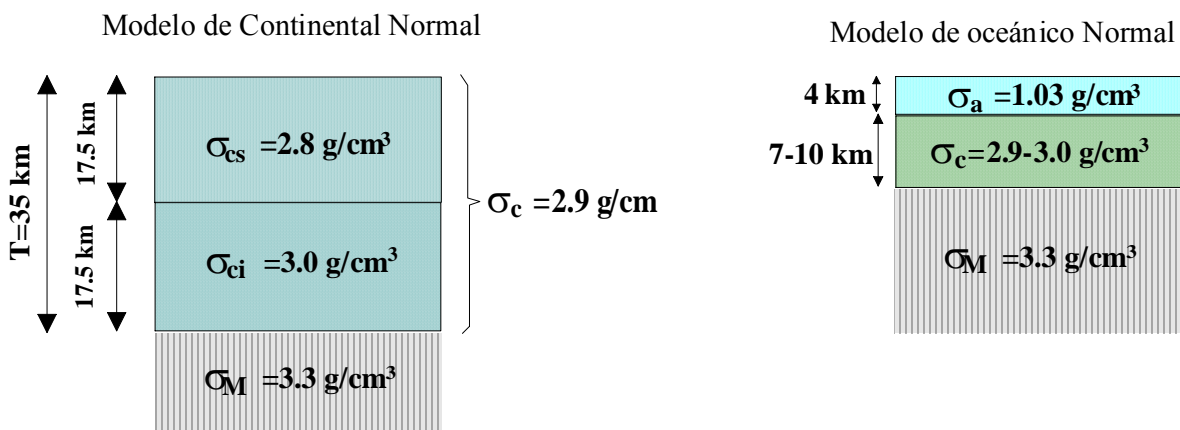
Ya se ha visto que Airy consideraba que la corteza flotaba sobre el magma más denso del mismo modo que un iceberg flota en el mar. Tal analogía señalada por Airy no encuentra, sin embargo, un completo paralelismo en la mecánica de la corteza. Las diferencias fundamentales son:

- La raíz de la masa de hielo flotante comienza a nivel del mar, mientras que las raíces de las cadenas montañosas comienzan a una profundidad media de unos 30 km a 35 km de profundidad.
- La parte subyacente de los rasgos topográficos (raíces) no presenta la misma facilidad para penetrar en el magma más denso, que el iceberg en el agua.

En los años 1924-1931 y 1938, Heiskanen trató de perfeccionar la hipótesis de Airy y computó tablas basadas en los siguientes puntos:

- La compensación isostática es completa (la masa topográfica m_T iguala a la masa de compensación m_C).
- Los bloques se compensan localmente, exactamente por debajo de los rasgos topográficos (Vening-Meinesz, como veremos, considera compensación lateral o regional).
- La densidad de la corteza es constante e igual a 2.67 g/cm^3 (densidad considerada entonces como promedio del granito).
- La densidad del magma es también constante e igual a 3.27 g/cm^3 (densidad correspondiente a materiales del manto superior*)

Debe notarse que adoptar un corteza homogénea de $\sigma_c=2.67 \text{ g/cm}^3$ en continentes y océanos flotando en una capa plástica subcortical de densidad $\sigma_M=3.27 \text{ g/cm}^3$ no es más que un modelo útil para la aplicación de la hipótesis de Airy. Modelos geológicamente más representativos, aunque demasiado generalizados, correspondientes a la corteza continental y oceánica (ver figura).



Sin embargo, la distribución de densidades dentro de la corteza no es crítica. Lo realmente importante es la densidad media de la corteza σ_c y del manto superior σ_M .

(*) Hoy se sabe que los valores de densidad en corteza y manto superior no son fijos, sino que varían para cada región. Además, los valores medios ahora aceptados son para la corteza: 2.93 g/cm^3 y para el manto: 3.32 g/cm^3 , en lugar de 2.67 y 3.27 g/cm^3 , respectivamente.

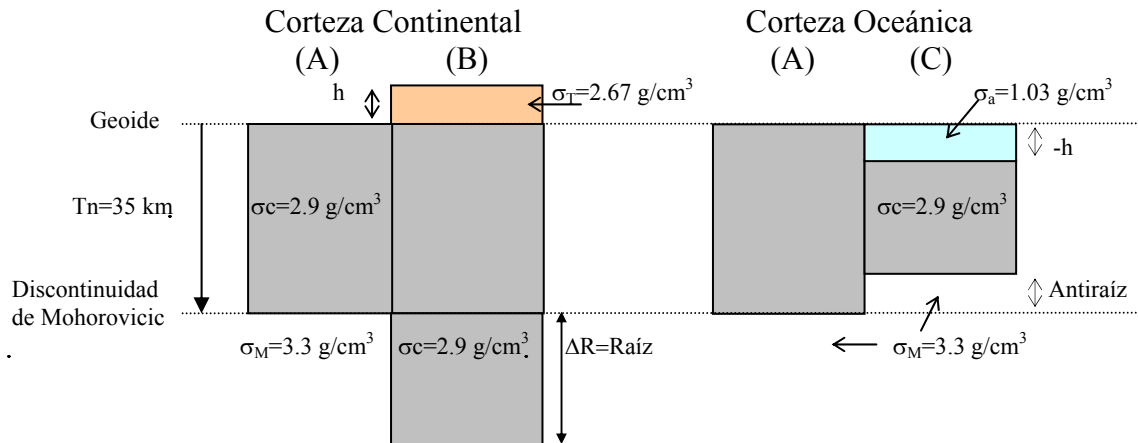
Antes de adoptar un valor para el espesor T de la corteza, Heiskanen realizó numerosos ensayos (variando T entre 20 y 100 km) encontrando finalmente como valores más probables los comprendidos entre 30 y 40 km. En la actualidad y para numerosos trabajos se adopta un espesor normal T_n de 30 a 35 km como promedio de estudios realizados en diferentes regiones del mundo.

Busquemos la relación entre las raíces corticales que penetran un ΔR en el magma y las sobre-elevaciones h de las masas topográficas en la hipótesis de Airy-Heiskanen. De acuerdo con (III.21) la relación masa topográfica (emergente) m_T versus masa de compensación m_C será:

$$\Delta R = \frac{2.67}{3.27 - 2.67} \cdot h = 4.45 \cdot h ;$$

La tendencia actual considera como densidades de corteza y manto superior los de 2.93 g/cm^3 y 3.32 g/cm^3 , respectivamente. Con estos valores $\Delta R=7.5 \cdot h$.

En la práctica se trabaja como sigue:



Si comparamos un bloque normal ($h=0$ y $T=35 \text{ km}$) con uno cuya emergencia sea h , la raíz (ΔR) de este bloque se podrá calcular considerando que los bloques A y B de la figura, deben pesar lo mismo por debajo de la discontinuidad de Moho (en el nivel de máxima profundidad cortical):

$$\text{masa bloque A} = \text{masa bloque B}$$

$$\sigma_c \cdot T + \sigma_M \cdot \Delta R = \sigma_T \cdot h + \sigma_c (T + \Delta R)$$

$$\Delta R = (\sigma_T \cdot h) / (\sigma_M - \sigma_c) \quad (\text{III.22})$$

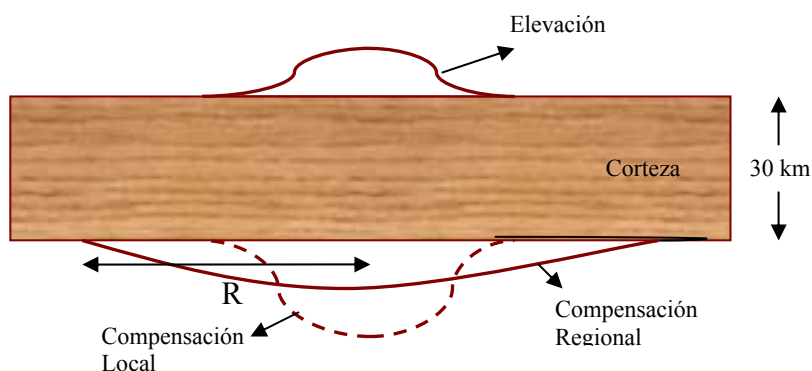
ΔR es el espesor de corteza anómalo del bloque B respecto del bloque normal A. El efecto gravimétrico de ΔR calculado sobre el nivel del mar nos dará la corrección isostática CI, si restamos CI a la anomalía de Bouguer obtendremos la anomalía isostática AI.

De igual modo se puede obtener la antiraíz en una cuenca oceánica o continental.

SISTEMA REGIONAL DE VENING – MEINESZ

En los dos sistemas mencionados antes se admitió que la compensación se realizaba estrictamente por debajo de las masas superficiales, es decir en forma local. Cada trozo de corteza modificaría su densidad o su presión para lograr la compensación. Para Vening – Meinesz resulta difícil que esto se cumpla en la naturaleza. En el sistema de Airy, sería más correcto admitir que a una masa montañosa corresponde un hundimiento general (regionalizado) de la corteza en el magma, más que hacer corresponder exactamente un hundimiento para cada pico y un levantamiento de la base para cada valle. El sistema de

compensación regional ha sido imaginado por Veining – Meinesz para que corresponda a estas consideraciones físicas.



En la reducción se han utilizado criterios de regionalidad. Calculándose tablas para varios radios R de regionalidad: 29.05; 58.1; 116.2; 174.3; 232.4. Tomando R desde el borde de compensación isostática.

Concebimos primero la corteza terrestre como una losa plástica flotando horizontalmente sobre un sustrato viscoso, más denso y cargada con el relieve topográfico. Esta corteza debería ceder bajo el exceso de peso.

REFERENCIAS

Blakely, R. 1995. *Potencial Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge U. Press. 441 pp.

Contribuciones a la Geodesia en la Argentina de Fines del Siglo XX, 1999. Editor Antonio Introcaso. UNR Editora. 293 pp.

Heiskanen W. A. and H. Moritz, 1982. *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional de Astronomía y Geodesia, Madrid, España. 371 pp.

Introcaso, A., 1997. *Gravimetría*. Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, 350pp.

Ruiz, F. y M. Gimenez, 2003. *Prospección Geofísica*. Libro de apuntes para la Maestría en Ingeniería Vial, IV Módulo: "GEOTECNIA APLICADA A LA INGENIERÍA DE CARRETERAS Y PROSPECCIÓN GEOFÍSICA". Universidad Técnica de Oruro, Facultad Nacional de Ingeniería, Oruro, Bolivia. 132 pp.

Toge, W., 1989. *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin. 465 pp.

Turcotte, D. L. and G. Schubert, 1982. *Geodynamics*. Wiley & Sons. 450 pp.

Udías Villana A. y Mezcua Rodríguez, 1986. *Fundamentos de Geofísica*. Ed. Alambra. 419 pp.

APÉNDICE I