

# **El Geoide**

# **Sistemas de Altura**

**Dr. Francisco Ruiz** (\*)

[fruiz@unsj-cuim.edu.ar](mailto:fruiz@unsj-cuim.edu.ar)

(\*) Instituto Geofísico Sismológico “Ing. F. Volponi”  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales  
Universidad Nacional de San Juan

**Cátedra: ELEMENTOS DE GEOFÍSICA**

**Carrera: Ingeniería en Agrimensura**

Páginas: 17

## GEOMETRÍA DEL CAMPO GRAVITATORIO – EL GEOIDE

Como hemos visto el Geoide es la figura de referencia de la Tierra, si se excluyen las variaciones de altura de las montañas, los valles y los fondos marinos. Una característica importante del Geoide es que debe ser horizontal en todos sus puntos, puesto que sirve como referencia para medir las alturas topográficas. Arbitrariamente, de todas las superficies horizontales posibles, se toma la situada al nivel medio del mar.

El concepto de dirección vertical (dirección de la plomada) es precisamente la dirección del campo gravitatorio. En efecto, la dirección de la plomada viene dada por la posición de equilibrio, en la que el momento que ejercen la fuerza gravitatoria y la reacción de la cuerda o hilo es cero: es decir, la dirección de la plomada coincide con la dirección de la intensidad del campo gravitatorio terrestre  $g$ .

La horizontalidad del geoide en todos sus puntos exige por tanto que sea también perpendicular en todos sus puntos al campo gravitatorio. Una superficie perpendicular al campo gravitatorio es precisamente una superficie equipotencial. El geoide es por tanto una superficie equipotencial, es decir, de potencial constante, situada al nivel medio del mar.

### Superficies Equipotenciales y Líneas de la plomada

El campo gravitatorio puede ser descrito geoméricamente por superficies de igual valor del campo gravitatorio terrestre: superficies equipotenciales o superficies de nivel:  $W(\mathbf{r})=\text{constante}$  y por las líneas de la plomada que son normales a estas superficies y describen el movimiento de caída de los cuerpos bajo el campo gravitatorio terrestre.

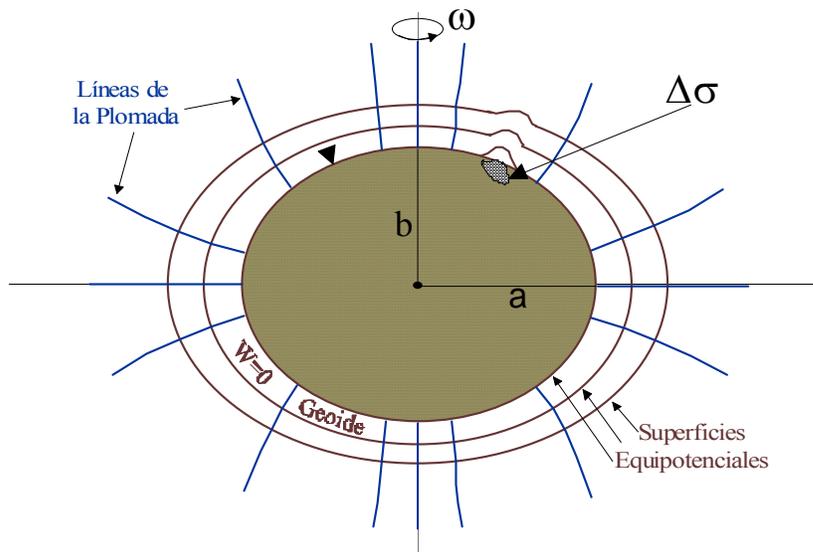


Figura 1

La relación entre cambios en el potencial y en la posición es:

$$dW = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = g \, dr \cos(\mathbf{g}, d\mathbf{r})$$

Donde  $g$ : gravedad;  $r$ : radio o distancia.

Si nos movemos en una superficie de nivel  $dW=0$ , no se desarrolla trabajo, esta superficie es una superficie de equilibrio.

Las líneas de la plomada intersectan las superficies de nivel

perpendicularmente. Si  $d\mathbf{r}$  coincide con la dirección de la línea de la plomada (la normal a la superficie es el versor  $\mathbf{n}$ ) entonces  $\cos(\mathbf{g}, d\mathbf{r}) = -1$ ,

luego:

$$dW = -g \, dn. \quad (1)$$

Como la gravedad varía, las superficies de nivel ( $W_i$ ) no son paralelas; un incremento en gravedad causa una convergencia en las superficies de nivel. La superficie de nivel que aproxima óptimamente al nivel medio del mar se denomina *geoide* ( $W_0$ ). Este sirve de superficie de referencia para definir sistemas de altitud.

## EL GEOIDE

La superficie de la Tierra puede ser representada de diferentes maneras. El límite de la superficie física o sólida de nuestro planeta es bastante irregular, y no puede ser representada fácilmente en forma matemática (ver pag. 3 de Torge, 2001).

La misma será aproximada a partir de las coordenadas geodésicas de un conjunto más o menos denso de puntos bien distribuidos sobre buena parte de los continentes y datos del lecho marino. Actualmente, los modelos digitales de elevaciones (en inglés: DTM, digital terrain model) derivados de observaciones satelitales sirven para interpolar entre los puntos de coordenadas conocidas.

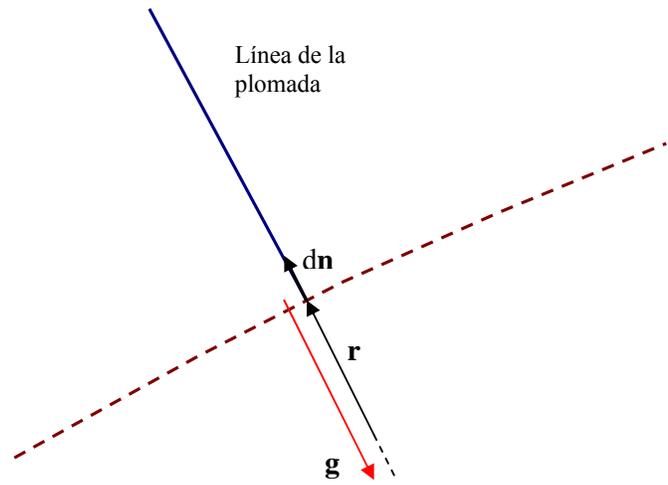


Figura 2

Mucho más conveniente es representar la superficie media de los océanos que cubre cerca del 70 % del planeta. Despreciando los efectos no gravitatorios, esa superficie coincidirá con una superficie equipotencial. Extendiendo la misma por debajo de los continentes, queda definida la superficie fisico-matemática de la Tierra conocida con el nombre de *geoide*.

Gauss lo definió como la superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que coincide con el nivel medio de los océanos.

Matemáticamente:  $W = W(r) = W_0$

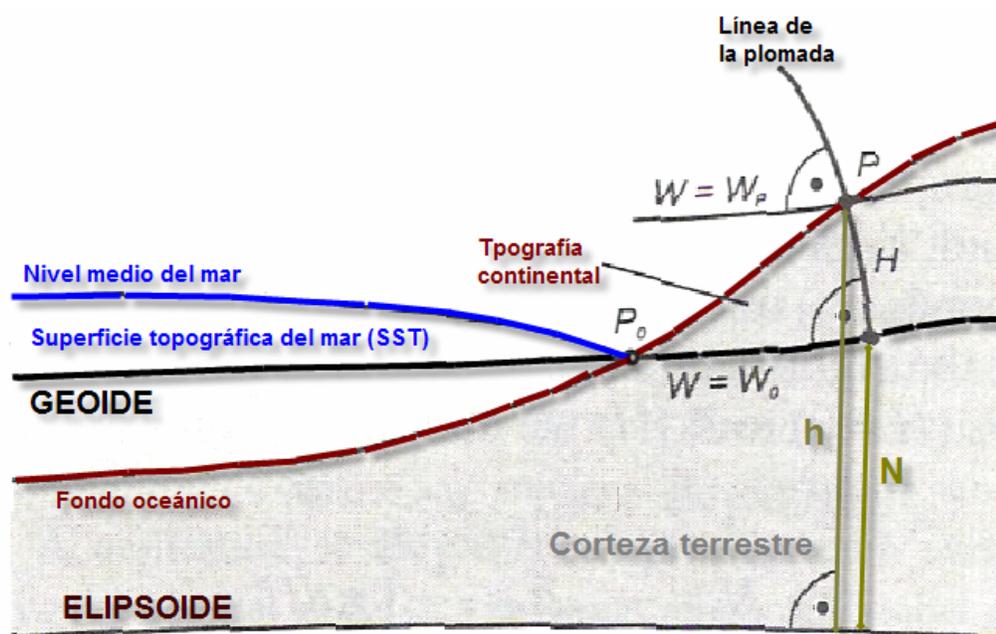


Figura 3: Topografía, geoide y elipsoide. SST: topografía de la superficie del mar. P: punto en la topografía, P<sub>0</sub>: P referido al geoide (sobre la línea de la plomada). H: cota ortométrica, h: altura elipsoidal, N: ondulación del geoide.

La palabra *geoide*, introducida por el geodesta alemán Listing en 1873, distingue a una de las superficies equipotenciales del campo de gravedad de la tierra que ha sido materializada con el nivel medio del mar, obtenido éste a partir de promediar series de registros de mareas a lo largo de 18.67 años. Esta superficie así materializada, se la extiende bajo las masas continentales y es considerada la forma real del planeta.

Para determinar el geoide es necesario determinar el potencial gravitatorio en la superficie terrestre, para posteriormente calcular la superficie de potencial constante, que según la definición, coincide con el geoide. La ecuación que debe verificar el potencial gravitatorio en puntos exteriores a la Tierra es la ecuación de Laplace (\*):

$$\nabla^2 W = 0 \quad (2)$$

(\*) esto no es sino una simplificación. De acuerdo con la definición que hemos dado para el geoide, muchos de sus puntos están situados bajo la topografía de los continentes, al nivel del mar, y en

esos puntos sí existen masas gravitatorias, por lo que la aplicación de la ecuación de Laplace no es estrictamente apropiada.

La solución de esta ecuación diferencial implica también la determinación de un número de constantes de integración, que deben calcularse experimentalmente mediante medidas directas de la forma de la superficie de la Tierra. El potencial total, sumando el debido a la gravedad y el debido a la fuerza axífuga será entonces:

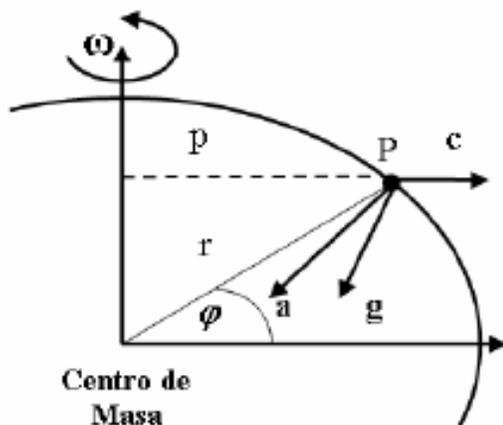


Figura 4

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \Phi(x, y, z)$$

$$W = W(x, y, z) = G \iiint_v \frac{1}{l} \cdot \sigma \cdot dv + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad (3)$$

Siendo:  $\sigma$ , la densidad de las masas;  $v$ , volumen;  $\omega$ , velocidad rotación de la Tierra.

Queriendo conocer el campo gravitatorio real de la tierra,  $W$ , se ha incorporado un modelo del potencial, denominado *normal*, que corresponde matemáticamente al potencial del campo de gravedad de un elipsoide de revolución o elipsoide de *nivel*.

Este elipsoide de nivel será aquél que mejor ajuste a la Tierra y su superficie, conformará una superficie de nivel normal de su campo gravitatorio.

El campo gravitatorio normal, de este elipsoide de nivel, quedará determinado a través de: a- los parámetros geométricos que lo definen, semiejes y aplastamiento y b- parámetros físicos: la masa total de la tierra uniformemente distribuida, y la velocidad angular de rotación, ambos iguales a los valores de la Tierra real. Además, el centro de gravedad de este elipsoide coincide con el centro de gravedad de la Tierra.

De esta manera, el campo de gravedad real podrá dividirse en un campo *normal* y otro *perturbador*, que es el que resulta de la diferencia entre el campo real y el normal. Siguiendo a Heiskanen y Moritz (1985), se tendrá:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) \quad (4)$$

Con:  $U$ , potencial del campo gravitatorio normal,  $T$ , potencial perturbador.

Si el potencial anómalo o perturbador es aquel que surge de la diferencia entre los potenciales real y normal, habrá una vinculación entre él y la ondulación del geode N, que es la distancia entre la superficie del geode y la superficie elipsoidal medida en la dirección de la normal.

## FÓRMULA DE BRUNS

Resulta significativo conocer cuál expresión puede relacionar el potencial perturbador T con la ondulación del geode N.

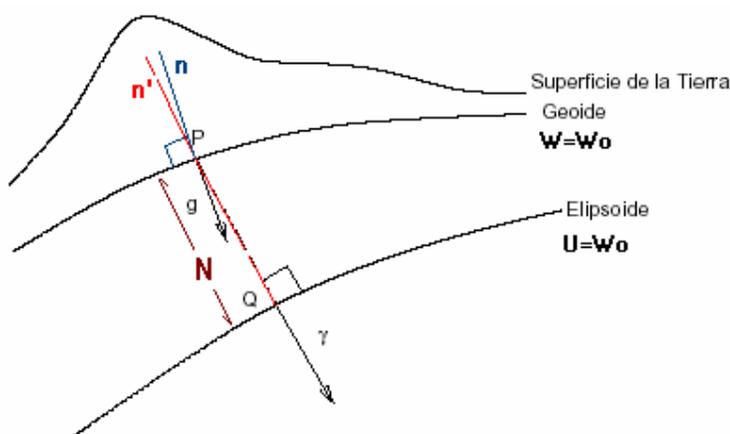


Figura 5

Observando la figura, el potencial normal del punto P ( $U_P$ ), sobre la superficie equipotencial del geode, puede calcularse desde el desarrollo en serie a partir del potencial normal en el punto Q ( $U_Q$ ), que es la proyección de P sobre la superficie elipsoidal. Considerándose sólo los términos lineales del desarrollo en serie se tiene:

$$U_P = U_Q + \left( \frac{\partial U}{\partial n'} \right)_Q \cdot N + \dots \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que  $\left( \frac{\partial U}{\partial n'} \right)_Q = -\gamma$  es la gravedad normal, resulta entonces:

$$U_P = U_Q - \gamma \cdot N \quad (6)$$

Desde (4):

$$W_P = U_P + T_P$$

Reemplazando  $U_P$  de (6):

$$W_P = U_Q - \gamma \cdot N + T_P$$

Por definición:  $W_P(x, y, z) = W_0(x, y, z) = U_Q(x, y, z)$

Para el punto P:

$$T_P = \gamma \cdot N$$

Así se obtiene la expresión que relaciona el potencial anómalo o perturbador con la ondulación del geoide:

$$N = \frac{T_P}{\gamma} \quad (7)$$

Esta relación, muy importante para los cálculos del geoide, se conoce como Fórmula de Bruns (Heiskanen y Morritz, 1985).

## DETERMINACIÓN DEL GEOIDE

El objetivo es calcular las ondulaciones del geoide (N) a partir del conocimiento del potencial anómalo (T).

### Ecuación Fundamental de la Geodesia Física:

Considerando:

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}, \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial n'}$$

Admitiendo que la diferencia entre la normal al geoide (vertical)  $n$  y la normal al elipsoide  $n'$  es pequeña, se puede escribir:

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}$$

Definiendo la *perturbación de la gravedad*  $\delta g$  como:

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (8)$$

$$\delta g = -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\right) = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

Donde el vector:

$$\delta \vec{g} = \text{grad} \cdot (W - U) = \text{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (9)$$

Para vincular el potencial perturbador con la anomalía de gravedad podemos proceder como sigue:

$$\delta g = g_P - \gamma_P = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

Donde:

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot N$$

Luego:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot N$$

Además la anomalía de gravedad es:  $\Delta g = g_P - \gamma_Q$

Entonces considerando la anomalía de gravedad y la fórmula de Bruns, resulta:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot N$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot N$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot \frac{T}{\gamma}$$

Que resulta ser la Ecuación Fundamental de la Geodesia Física, ecuación diferencial cuya resolución permite conocer T a partir de las anomalías de gravedad:

$$\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot \frac{T}{\gamma} + \Delta g = 0 \quad (10)$$

### Integral de Stokes

La integral de Stokes posibilita calcular T desde (10) y mediante la fórmula de Bruns conocer N.

Para ello los valores de gravedad deben ser reducidos a la superficie geoidal. De esta manera (10) es una ecuación de contorno (condición de borde) para el potencial perturbador. Si además se establece la condición de que T sea armónico fuera de la superficie del geode, es decir que satisfaga la ecuación de Laplace:  $\nabla^2 T = 0$ . Entonces, la obtención del potencial anómalo T se conoce como el *tercer problema de contorno de la teoría del potencial* (Heiskanen y Moritz, 1967).

Si se emplea una aproximación esférica (10) puede escribirse como:

$$\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T + \Delta g = 0 \quad (11)$$

R: radio medio de la tierra en aproximación esférica.

Teniendo en cuenta la armonicidad de T, éste entonces puede desarrollarse a través de una serie de armónicos esféricos (Torge, 1989, pp43 y Torge, 2001).

Para poder integrar la ecuación (11) y así obtener T, se requiere que las anomalías de gravedad puedan ser conocidas no solo en la superficie del geoide sino, fuera de él. Para cumplir esta condición, utilizando anomalías de aire libre se requiere un espacio armónico por encima del geoide (condensación de las masas por encima del geoide, esto se conoce como el método de condensación de Helmert).

La integral resultante se conoce como la integral de Stokes:

$$T_p = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g \cdot d\sigma \quad (12)$$

Siendo  $S(\psi)$ , la función de Stokes:

$$S(\psi) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} + 1 - 5 \cdot \cos \psi - 6 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - 3 \cos \psi \cdot \ln \left( \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\psi^2}{2} \right) \quad (13)$$

donde  $\psi$  es la distancia esférica entre el punto de cálculo y el diferencial de superficie considerado  $d\sigma$ .

Aplicando la fórmula de Bruns puede obtenerse la ondulación del geoide a través de la integral de Stokes:

$$N_p = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g \cdot d\sigma \quad (14)$$

El desarrollo completo de las expresiones puede verse en Heiskanen y Mritz (1985).

Estas expresiones pueden ser simplificadas. Así, en su forma plana (14) puede escribirse como:

$$N_p = \frac{R}{2\pi\gamma} \iint_S \frac{\Delta g}{l_i} \cdot dS$$

Esta aproximación considera:

$$S(\psi) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} \approx \frac{\psi}{2} \approx 2 \frac{R}{l_0}$$

$l_i$  es la distancia entre el punto con valor de anomalía  $\Delta g_i$  y la estación  $i$  donde se calcula  $N_i$ .  
y  $dS = R^2 \cdot d\sigma$ , el elemento plano que aproxima el elemento esférico de superficie.

## **El procedimiento de Molodensky**

Según Heiskanen y Moritz (1967, 1985) es el procedimiento *moderno* para determinar las ondulaciones del geoide a partir del conocimiento del potencial perturbador  $T$  mediante el empleo de anomalías gravimétricas, cuya característica relevante es evitar hacer hipótesis acerca de la densidad de las masas (usando anomalías calculadas sin llevar  $g_{obs}$  al geoide, sino llevar la  $g$  normal al punto en que se observa  $g$ ).

Con este procedimiento se obtienen, en vez de  $N$ , las denominadas *anomalías de altitud* ( $\zeta$ ) o anomalía de altura, es decir la distancia entre el elipsoide y una superficie similar al geoide el *cuasigeoide* (que no es una superficie con características físicas).

Para la obtención del potencial anómalo se aplica la tercera identidad de Green a la superficie de la Tierra (Ver página 19 y capítulo 8 de Heiskanen y Moritz, 1967 y 1985).

## **DETERMINACIÓN GEOMÉTRICA DE $N$**

En este caso el valor de la ondulación del geoide surge de la hipótesis de la pequeña discrepancia existente entre la vertical, perpendicular a la superficie del geoide, y la normal, perpendicular a la superficie del elipsoide (Ver Figura 3).

$$N \approx h - H$$

$N$ : Ondulación del Geoide,

$h$ : Altura sobre el elipsoide de referencia,

$H$ : Altura ortométrica de sobre la superficie geoidal.

La longitud  $h$  surge del empleo del Posicionamiento Global Satelitario.  $H$  surge a partir de nivelación geométrica con valores de gravedad, este punto será desarrollado con mayor amplitud mas abajo en Sistemas de Altura.

## **APROXIMACIONES GLOBALES DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE – GEOIDES GLOBALES (Modelos Geopotenciales Globales)**

Es muy importante contar con un modelo de gravedad global o geopotencial, que incluya toda la Tierra.

Estos modelos están basadas en la expansión en armónicos esféricos de  $T$  o  $\Delta g$ . Se requieren para resolver problemas en grandes regiones de la superficie terrestre (determinación de la órbita

de satélites artificiales, reducción de estudios inerciales, modelos geofísicos y geodinámicos) y como una referencia para aproximaciones del campo local (redes de control geodésico local).

Las largas longitudes de onda de estos modelos se obtienen a partir de información de satélites artificiales. Las técnicas hoy son múltiples, pero al comienzo se basaron en la observación de las perturbaciones orbitales provocadas por las anomalías de masa terrestre. Los desvíos entre la órbita observada y la calculada se atribuyen a deficiencias del modelo gravitacional. Las diferencias se minimizan mejorando los parámetros del modelo.

Más adelante, los satélites altimétricos comenzaron a aportar información fundamental sobre la altura de los océanos. En los últimos años misiones como CHAMP, GRACE (y desde marzo de 2009 GOCE) incluyeron además instrumentos para la medición de gravedad y gradiente de gravedad.

Teniendo en cuenta la armonicidad de  $T$ , éste entonces puede desarrollarse a través de una serie de armónicos esféricos (Torge, 2001):

$$T(r) = \frac{GM}{r} \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta \bar{C}_{l,m} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{l,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \right\}, \quad (15)$$

$G$ : constante de la gravitación universal

$M$ : masa de la Tierra, incluyendo la atmósfera

$a$ : semi-eje mayor del elipsoide de referencia

$r$ : distancia geocéntrica

$C_{lm}$  y  $S_{lm}$ : coeficientes armónicos esféricos normalizados

$\vartheta = 90 - \varphi$

$P_{lm}$ : funciones asociadas de Legendre normalizadas

Con grado  $l$ , orden  $m$ . En general, en la primera sumatoria  $l$  se considera a partir de 2, asumiendo que el origen del sistema de coordenadas coincide con el geocentro. Es decir  $l$  comienza en 2 debido a que se asume coincidencia entre las masas de la tierra y del elipsoide y el centro de masas de la tierra real coincide con el del elipsoide. En algunos de los modelos geopotenciales se incluyen términos correspondientes a  $l=1$ .

Debido a la distribución irregular de anomalías de gravedad y a la variabilidad de los datos globales, se usan soluciones *combinadas* en el modelado:

- Observaciones de satélites artificiales
- Anomalías de aire libre medias (promediadas en celdas de hasta  $1^\circ \times 1^\circ$ )
- Alturas geoidales medias en zonas marinas (altimetría satelital).

Los coeficientes armónicos pueden determinarse mediante ajuste por mínimos cuadrados de los datos o por su integración sobre la tierra (Rapp, 1986). Estos modelos:

- Solo pueden desarrollarse hasta un grado  $l$  máximo (longitud de onda mínima), que se determina por la distribución espacial de los datos globales disponibles.
- La distancia entre los puntos más cercanos determina la resolución (media longitud de onda ( $\lambda$ ))  $2 \cdot 180^\circ / l_{\max}$  de la menor estructura que pueda verse.
- Los set de datos con cobertura global permiten expansiones en armónicos esféricos con  $l_{\max}=360$  (hasta  $l_{\max}=2160$ , en el modelo EGM2008).
- Las estructuras de **larga longitud de onda** son de grado hasta  $l_{\max}=36$ , ellas contienen información de las grandes estructuras del campo gravitatorio terrestre (c.g.t.).
- Expansiones de mayor orden son posibles por la combinación de coeficientes obtenidos preajustando observaciones satelitales con datos terrestres, anomalías de gravedad promediadas ( $\Delta g: 1^\circ \times 1^\circ$ , por ejemplo), también se tienen en cuenta modelos oceanográficos, expandidos hasta grado y orden 20.
- Las resoluciones de  **$\lambda$  media** son para  $l_{\max}$ : 37 a 180 ( $10^\circ$  a  $2^\circ$ )
- Las de  **$\lambda$  corta**,  $\lambda_{\max}$ : 181 a 2000 ( $2^\circ$  a  $10'$ )
- Las  **$\lambda$  ultra cortas**,  $\lambda_{\max}$ : 2001-40000 ( $10'$ -1km)
- Hasta la década de 1990, las  $\lambda$  largas ( $l < 11$ ) se determinaron por datos satelitales. Las  $\lambda$  medias ( $11 > l > 60$ ) por altimetría satelital y el resto por anomalías de gravedad.
- El *U. S. Department of Defense World Geodetic System 1984 (WGS84)* es una aproximación al Sistema de Referencia Geocéntrico e incluye un modelo en armónicos esféricos completo para grado y orden 180.

En resumen, los desarrollos en armónicos esféricos del potencial al grado  $l$  y orden  $m$  representan una descomposición espectral del campo gravitacional. La longitud de onda asociada con el desarrollo al grado y orden  $l$ , es  $\lambda = 360^\circ / l$ , que corresponde a una resolución de  $180^\circ / l$ .

El modelo Geopotencial queda definido por el conjunto de coeficientes armónicos esféricos normalizados  $C_{lm}$  y  $S_{lm}$ , que son determinados observacionalmente a partir de expresiones como (15).

### Altimetría Satelital

Este método es empleado para construir los desarrollos de grado y orden intermedio de los modelos geopotenciales globales. La derivación de anomalías gravimétricas a partir de datos de altimetría satelitaria comenzó con el satélite *Seasat* (Haxby, 1988) y siguió con los satélites *Geosat*, *ERS-1*, y, más recientemente, *Topex/Poseidon*.

Para establecer la topografía de la superficie del océano con precisión de 3 cm se hacen dos mediciones distancias: altura del satélite sobre el elipsoide ( $h^*$ , se mide por el rastreo del satélite desde una red de estaciones laser y / o Doppler) y altura del satélite por encima del océano ( $h$ , se mide con un radar de microondas). El radar ilumina un espacio relativamente grande en la superficie oceánica de 45 km de diámetro. Se puede conseguir una huella efectiva mucho menor (de entre 1 y 5 km de diámetro) generando un pulso de radar agudo y registrando con precisión su

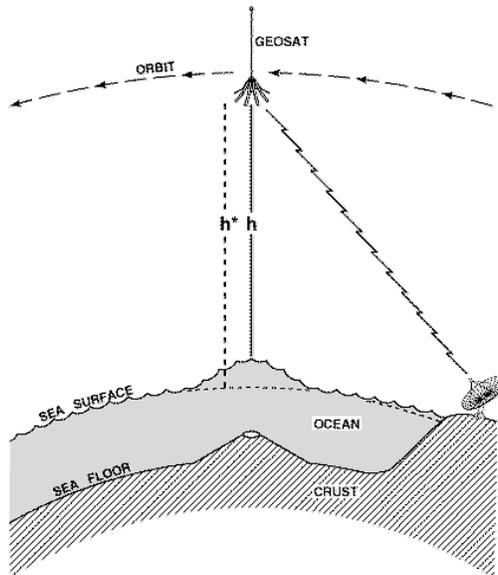


Figura 6: Esquema del método de Altimetría satelital

tiempo de ida y vuelta. La huella del pulso debe ser suficientemente grande como para promediar las irregularidades locales en la superficie debidas a las ondas oceánicas.

El frente de ondas esférico del pulso asegura que la altitud sea medida respecto a la superficie oceánica más cercana. La diferencia de alturas da el geode:

$$N = h^* - h.$$

La superficie del océano es una superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre (ignorando olas, vientos, mareas y corrientes). En una primera aproximación, esta superficie equipotencial es una esfera. Sin embargo, por causa de la rotación de la tierra la superficie equipotencial se ajusta mejor con un elipsoide, cuyo diámetro polar es 43 km menor que su diámetro ecuatorial. Si bien el elipsoide ajusta la tierra muy bien, la superficie del océano se desvía hasta 100 metros del elipsoide ideal. Estas desviaciones (elevaciones y depresiones) se deben a pequeñas variaciones en el campo gravitatorio terrestre. Por ejemplo, la atracción gravitacional extra debida a una montaña en el fondo oceánico atrae el agua hacia ella causando una elevación en la superficie del océano. Esta convexidad no puede notarse a simple vista porque la pendiente de la superficie oceánica es muy baja.

- Perfiles de muchos satélites, recolectados en muchos años, se pueden combinar para hacer imágenes de alta resolución. Sandwell y Smith (1997, 2009) han desarrollado un método para convertir estas mediciones crudas de elevación geoidal en imágenes (o grillas) de anomalías de gravedad.

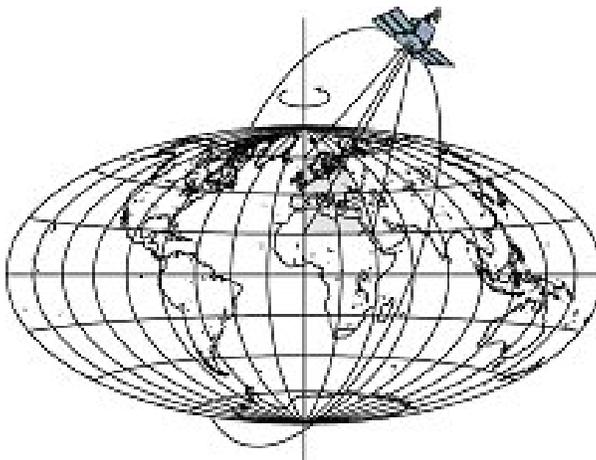


Figura 7: Medición de las perturbaciones de la órbita satelital.

### Observación de las Perturbaciones de la Órbita de Satélites Artificiales

Se usa para reconstruir las largas longitudes de onda del campo gravitatorio (desde 1958). Hasta ahora resuelven los rasgos espaciales presentes en la gravedad con longitudes de onda media mayores que 500 km.

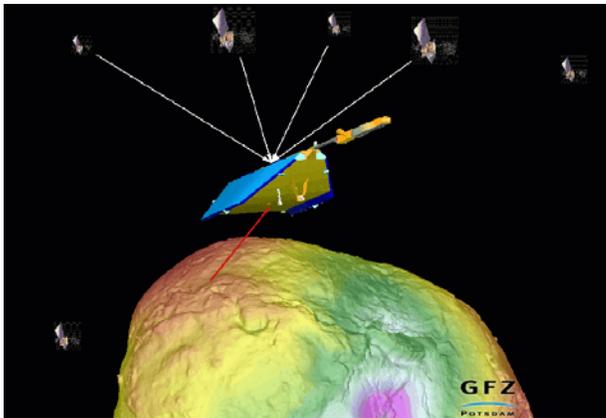
Se basan en el análisis de las órbitas de satélites artificiales. Se controla el paso del satélite mediante cámaras en tierra (estaciones de rastreo) aprovechando los datos de microondas y monitoreo láser, de algunas decenas de satélites a diferentes altitudes e inclinaciones de órbita (Biancale et al., 2000).

La órbita real del satélite se aparta de la órbita Kepleriana debido a los efectos de las fuerzas perturbadoras, estas incluyen las partes no esféricas del campo gravitatorio de la tierra (p.133, Torge,2001). El vector de posición  $r(t)$  de un satélite (masa) se basa en la ecuación del movimiento de Newton:

$$K = m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

La gravitación del cuerpo atrayente  $K$  se aproxima por armónicos esféricos. La doble integración de esta ecuación da la posición del satélite:

$$r_s = r_s(c_i; GM, C_{l,m}, S_{l,m}; t)$$



$C_i$ : elementos de la órbita Kepleriana inicial;  $t$ , es el tiempo. El potencial empleado en el cálculo de  $r_s$  también sirve para interpolar y ajustar la órbita y es el *potencial perturbador*.

### **Satélite CHAMP**

El satélite CHAMP, lanzado el 15 de julio de 2000 (hasta 2006), con un perigeo de 474 km, describiendo órbitas polares, es el más moderno de estos satélites.

Con el satélite CHAMP por primera vez se hace posible derivar el campo gravitatorio terrestre desde las perturbaciones de la órbita de un solo satélite recogidas durante meses, con lo cual se mejora al menos en 4 veces la precisión de las observaciones.

En sus aplicaciones geodésicas, el geoide se pudo calcular con precisión

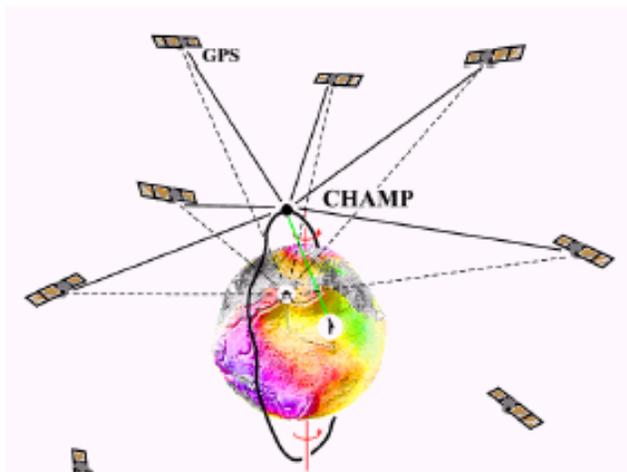


Figura 8: Arriba: Satelite CHAMP, monitoreado con laser desde tierra y localizado con el sistema GPS. Abajo: Esquema de las perturbaciones de la órbita medidas.

cercana al cm con una resolución espacial de 650 km de longitud de onda media. Este geoid refleja las irregularidades del campo gravitatorio debidas a la distribución heterogénea de masas en la tierra.

Las largas longitudes de onda medidas sirven de referencia para los modernos modelos globales de c.g.t. de alta resolución.

### *Satélite GRACE*

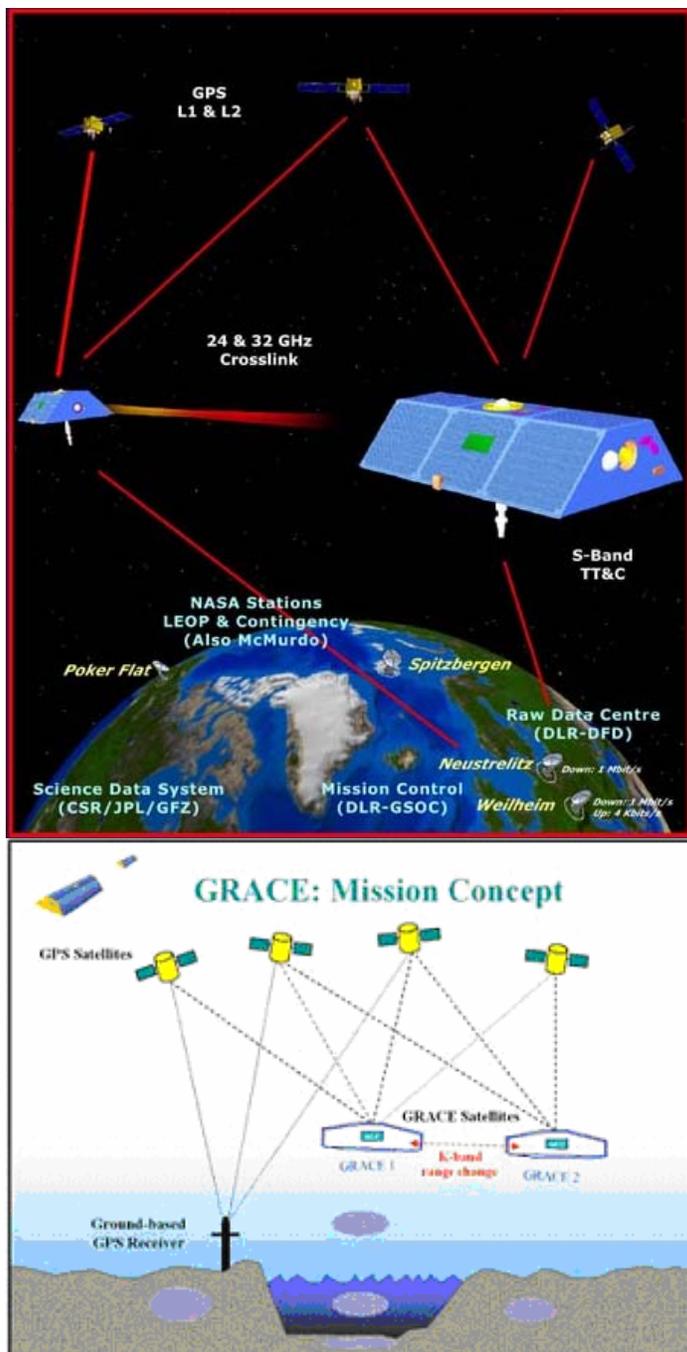


Figura 9: La misión GRACE, consiste en la medición de cambios de rango inter-satélite, en acelerómetros, GPS y medidas de posición desde cada satélite.

Especialmente con la incorporación al sistema, de 2 satélites GRACE (rastreo satélite a satélite con acelerometría y monitoreo GPS) se ha logrado que la resolución de los modelos sea de 140 km de longitud de onda, con una mejora en la precisión de casi dos órdenes de magnitud, ver: (<http://www.csr.utexas.edu/grace>).

Desde los datos de la misión GRACE, se estimaron modelos globales medios, variables con el tiempo, del campo gravitatorio terrestre. Esto se hizo cada 30 días durante más de 5 años planeados para la misión, lanzada en marzo de 2002.

La misión GRACE permitió generar modelos del campo gravitatorio terrestre como el calculado en 2005: EIGEN-GL04C, combinado sus datos satelitales con gravimetría de superficie y con altimetría satelital. Los datos han sido analizados por el GFZ Postdam (Alemania) y el GRGS Toulouse (Francia).

El EIGEN-GL04C (Förste et al., 2007) es un desarrollo en armónicos

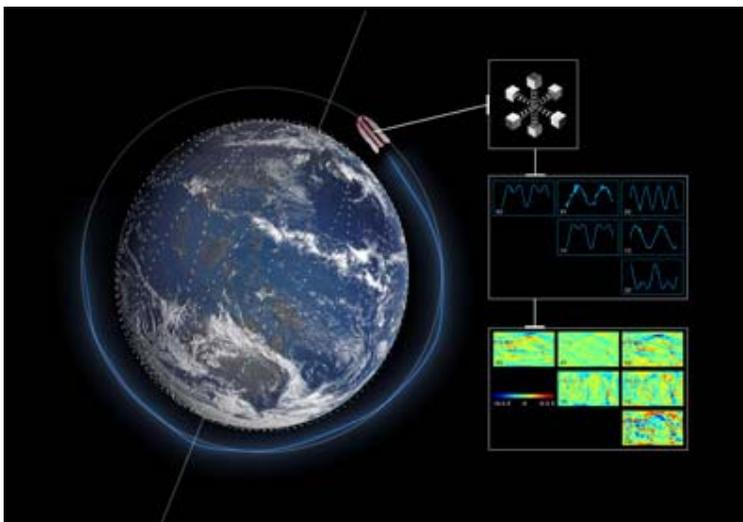
esféricos completo hasta grado y orden 360, que resuelve el geoide y las anomalías de gravedad en longitudes de onda de 110 km. Se limitó hasta esta banda para preservar la alta precisión de los datos satelitales en las bajas frecuencias, con una transición suave a los datos de alta frecuencia provenientes de mediciones en la superficie terrestre (con menor precisión). Estos modelos dan anomalías de altura en vez de ondulaciones del geoide ([http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/grav/g005\\_eigen-gl04c.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/grav/g005_eigen-gl04c.html)).

### *Satélite GOCE*

En el 2010 se completará el sistema CHAMP-GRACE con un cuarto satélite GOCE que por



primera vez permitirá obtener el campo gravitatorio a partir de Gradiómetros con un ensamble de 6 acelerómetros triaxiales para medir en órbita los gradientes de gravedad. El satélite GOCE fue lanzado el 17 de marzo de 2009 volará en una órbita extremadamente baja de 250 km de altitud.



GOCE está dedicado a medir el campo gravitatorio terrestre y a modelar el geoide con precisiones y resolución espacial sin precedentes (1 mGal de precisiones para el campo gravitatorio terrestre y 1 cm de precisión en las ondulaciones del geoide, con una resolución espacial mejor que 100 km).

Sus datos mejorarán, además del conocimiento geodésico, el conocimiento de la circulación oceánica, estudiando los cambios de energía en la superficie terrestre, cambios del nivel de los océanos y procesos físicos en el interior de la tierra.

## Modelos Geoidales Globales Disponibles

### WGS 84 EGM96:

El EGM96, es el más popular de los geoides globales, publicado en 1998, está en la mayor parte de los softwares de procesamiento de datos GPS, para el cálculo de cotas ortométricas desde las alturas elipsoidales obtenidas mediante mediciones GPS en modo diferencial (DGPS).

Es un modelo geopotencial con desarrollos en armónicos esféricos hasta grado y orden 360. El archivo de alturas geoidales de la NGA/NASA consiste en una grilla de valores con 0.25 grados de espaciamiento en un sistema libre de mareas (Lemoine et al., 1998). Las constantes WGS 84 usadas para definir la geometría del campo normal de referencia elipsoidal para el cálculo de las alturas geoidales son:

- $a=6378137.0$  m (eje semimayor)
- $f=1.0/298.2572235630$  (aplastamiento)
- $GM=0.3986004418D15$  m\*\*3/s\*\*2
- $OMEGA=7292115.D-11$  radians/sec (velocidad angular)

La solución final mezcla una combinación en bajos grados (hasta grado 70) de los datos obtenidos por combinación de procesamiento de órbitas satelitales, datos de gravimetría superficial y la medición directa de altimetría satelital. El modelado en alto grado, desde grado 70 hasta 360, se completa con rigurosas técnicas de modelado explotando las propiedades de simetría asociadas con el cálculo de los coeficientes del potencial desde las anomalías de gravedad medias grilladas regularmente en  $30' \times 30'$ .

El modelo EGM 96 es de acceso libre y gratuito: <http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/egm96/>

- Los N en una grilla de  $0.25^\circ \times 0.25^\circ$  se usan en un programa en FORTRAN (INTPT.F) para interpolar las ondulaciones del geode en un punto de coordenadas en WGS 84.
- El programa F477.F requiere los coeficientes en armónicos esféricos del EGM96 y sus coeficientes de corrección para calcular los N en una ventana.

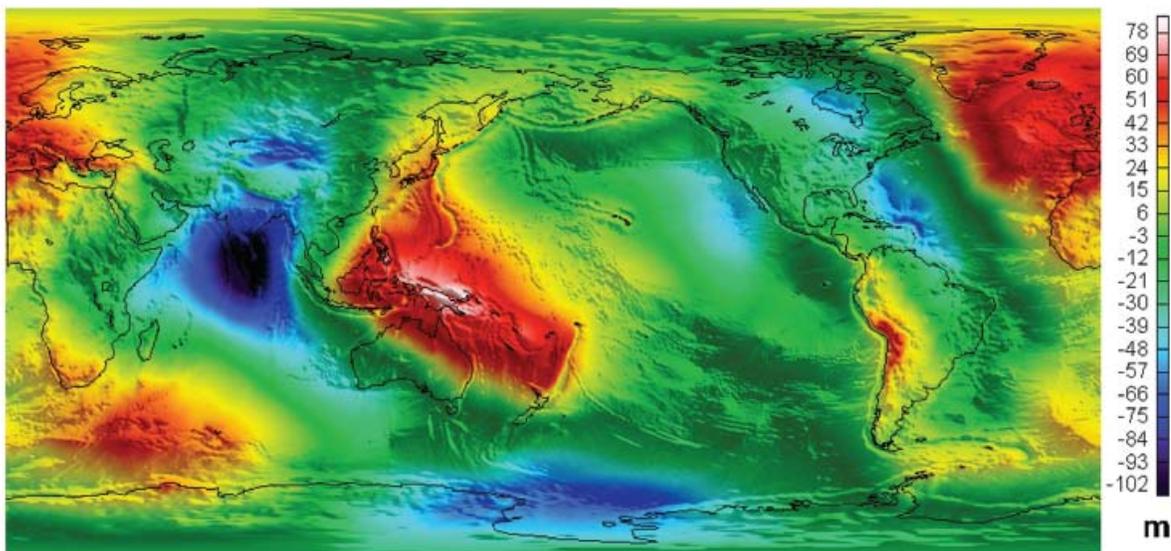
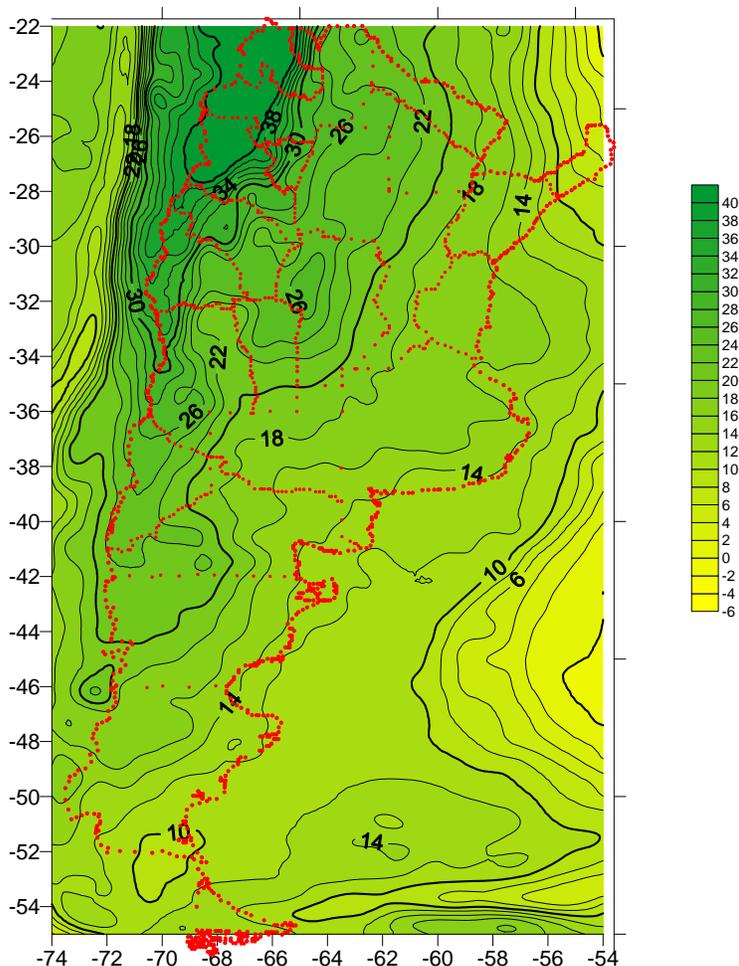


Figura 11: Ondulaciones del geode provenientes del Modelo Geopotencial de la Tierra, EGM96 (Lemoine et al., 1998).

## Modelos EIGEN



Incorporan los datos de los satélites CAMP y GRACE, combinados con datos de altimetría satelital y de mediciones gravimétricas en la superficie terrestre. Dan las anomalías de gravedad y las anomalías de altura con una resolución en grado y orden 360 x 360, es decir, con una resolución de 100 km de longitud de onda.

El mapa muestra las anomalías de altura  $\zeta$  para la Argentina.

Figura 12: Carta de Anomalías de Altura para la Argentina, desde el EIGEN-CG03C.

## Modelo EGM2008

Es el modelo del campo gravitatorio global más moderno. Puede obtenerse en la página: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/index.html>

El modelo oficial Earth Gravitational Model EGM2008 ha sido publicado y realizado por el equipo de desarrollo EGM de la National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) de EEUU. Este modelo gravitacional es completo en esféricos armónicos hasta grado y orden 2159, y contiene los coeficientes extendidos hasta grado 2190 y orden 2159.

## SISTEMAS DE ALTITUD

Como es ampliamente conocido, la *nivelación geométrica* se utiliza para determinar alturas usando líneas de visual horizontales entre dos puntos cercanos, donde se ubican miras verticalizadas, por lo tanto la diferencia entre lecturas (atrás – adelante), será la diferencia de altura geométrica  $dh$  entre miras (diferencia individual de nivelación), donde el no paralelismo de las superficies de nivel del campo gravitatorio y la diferencia de altura geométrica  $dh$  puede despreciarse (Figura 13).

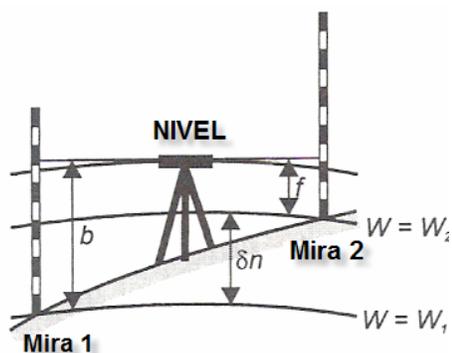


Figura 13: Nivelación geométrica.

Cuando se determinan altitudes sobre grandes distancias, se usan grandes cantidades de diferencias individuales  $dh$ , para obtener la cota  $H$  sobre el geoide. El método permite obtener *diferencias de altura crudas* como la sumatoria de las diferencias individuales:  $dH = \sum dh$ .

Para grandes distancias las superficies  $H = \text{constante}$  (nivelación geométrica) se desvían considerablemente de las superficies equipotenciales

del campo gravitatorio. La desviación global media es de  $\pm 30\text{mm}$ , sobre distancias de unos 100 km, las máximas desviaciones son del orden de los decímetros. Deben hacerse reducciones del mismo orden de magnitud para ser aplicadas a los resultados de nivelación geométrica, para convertirlas en alturas ortométricas.

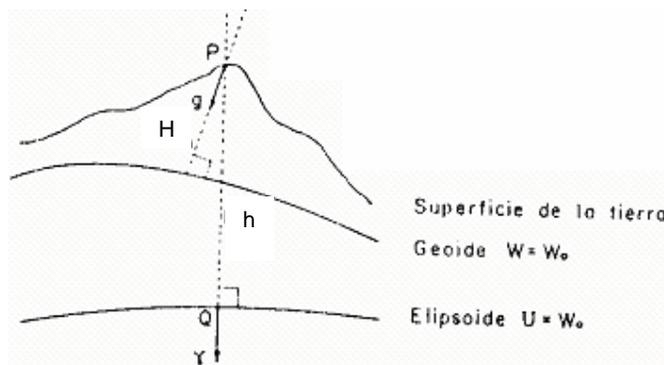


Figura 14: H cota ortométrica, h: altura elipsoidal.

### Alturas en el Campo Gravitatorio

Tradicionalmente para medir diferencias de altitudes entre dos puntos se emplea la nivelación geométrica. En una línea de nivelación cerrada, perfectamente medida (sin errores), la suma

algebraica de las diferencias de altitud  $dh$  no es cero, este error llamado error de cierre aumenta con la distancia entre los puntos a vincular.

La figura 15 muestra los principios geométricos más relevantes. El incremento de altitud geométrica  $dh$  varía de acuerdo al lugar donde se determine, es decir, por variar la horizontal (debido a la curvatura del campo gravimétrico) un  $dh$  medido en B donde se concentran las equipotenciales por existir mayor masa, será geoméricamente menor que el mismo  $dh$  medido sobre A.

Entonces la suma de las diferencias de altitud niveladas entre A y B no será igual a la diferencia de *altitudes ortométricas*(\*)  $H_A$  y  $H_B$ . La razón es que el incremento de nivelación  $dh$  en la estación  $i$  es distinto al correspondiente  $dH_B$  en la línea de la plomada de B, debido al no paralelismo de las superficies de nivel. Designando con  $dW$  al correspondiente incremento de potencial  $W$  (que sí se mantienen constante):

$$-dW = g_i \cdot dh = g' \cdot dH_B$$

donde  $g_i$  es la gravedad en la estación de nivelación y  $g'$  es la gravedad sobre la línea de la plomada de B en  $dH_B$ . Por lo tanto:

$$dH_B = \frac{g_i}{g'} \cdot dh \neq dh \quad (16)$$

(\*) La altitud ortométrica, también llamada altitud sobre el nivel del mar, se designa a la medida a lo largo de la línea de la plomada (curva) partiendo del geoide  $W_0$ .

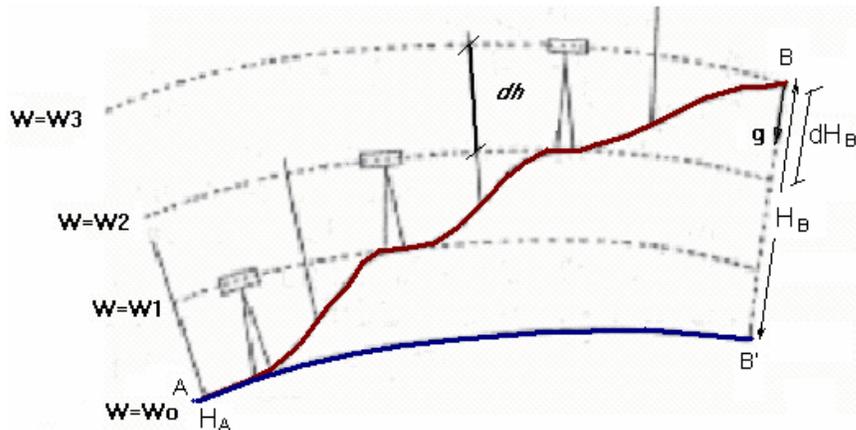


Figura 15

Por lo tanto no hay relación geométrica directa entre el resultado de nivelación y la altitud ortométrica porque (16) expresa una relación física. Entonces si se mide también la gravedad  $g_i$  en cada estación de nivelación se determina:

$$dW = -g_i \cdot dh$$

de modo que

$$W_B - W_A = -\sum_A^B g_i \cdot dh \quad (16)$$

Por consiguiente la nivelación combinada con lecturas de gravedad proporciona diferencias de potencial, cantidades físicas. Es más riguroso sustituir la suma (17) por la integral:

$$W_B - W_A = -\int_A^B g \cdot dh \quad (18)$$

Esta integral es independiente del camino de integración, esto es, diferentes itinerarios de nivelación que conecten los puntos A y B.

Referenciando las diferencias de potencial al valor  $W_0$  superficie de altura cero (geoide) se obtienen los *números geopotenciales* que pueden derivarse de las observaciones de  $g$ :

$$C = W_B - W_A = -\int_A^B g \cdot dh$$

En forma genérica, para un punto P cualquiera:

$$C = W_0 - W_P = \int_0^P g \cdot dn \quad (19)$$

Para la diferencia de potencial  $C$ , el punto P está asociado a una superficie de equilibrio (equipotencial)  $C=\text{cte}$ . La  $\sum dh$  (nivelación) depende del camino recorrido, sin embargo,  $W_0 - W_P$  no lo es. Sabemos que  $W_0 = 6263977 \text{ KGal m}$ .

Generalmente, (18) se expresa:

$$W_0 - W_P = C_P = \sum_{i=0}^P g_{m_i} \Delta h_i \quad (20)$$

Siendo  $C_P$ : *cota geopotencial*,  $g_{m_i}$  la gravedad medida en cada estación de nivelación.

Notemos que la *cota geopotencial* no tiene dimensiones métricas,  $W$  se expresa en  $\text{kGal m}$  o en  $\text{m}^2/\text{s}^2$ . Si se quiere transformar las medidas de potencial en medidas de altitud, se puede dividir por un valor medio de la gravedad  $\bar{g}$ , de esta forma obtenemos las altitudes como:

$$H = \frac{C_P}{\bar{g}} = \frac{1}{\bar{g}} \sum_{i=0}^P g_{m_i} \Delta h_i \quad (21)$$

Sin embargo el problema está en como calcular el valor medio de  $\bar{g}$ . El valor más exacto sería el valor medio de  $g$  entre el punto P y el nivel cero (geoide), debajo de dicho punto a lo largo de la línea de fuerza entre P y el geoide:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^h g(z) \cdot dz \quad (22)$$

Pero para calcular  $\bar{g}$  se necesita conocer  $g(z)$  entre P y el nivel cero, lo que no es posible, y conocer de antemano H que es precisamente lo que se pretende medir.

Para resolver estas dificultades y definir altitudes que tengan rigor científico, a partir de los desniveles, se procede introduciendo ciertas hipótesis. Como consecuencia, se obtienen aproximaciones a la altitud real.

### ALTITUD DINÁMICA ( $H_D$ )

Se define tomando para el valor de  $\bar{g}$  el valor de la gravedad teórica sobre el elipsoide:

$$H_D = \frac{1}{\gamma_0^{45}} \sum_{i=0}^n g_i \cdot dh_i \quad (23)$$

Siendo  $\gamma_0^{45}$  el valor de la gravedad normal sobre el elipsoide a 45° de latitud = 9.80629 m/s<sup>2</sup>. Esta expresión se utiliza para medir latitudes en meteorología. Usar  $\gamma_0^{45}$  puede introducir errores de hasta 3m en 1000m de desnivel.

### ALTITUD NORMAL ( $H_N$ )

Propuesta por Molodensky, se toma para  $\bar{g}$  la expresión (22), en la que se sustituye el valor real de la gravedad  $g$  por el valor de la gravedad normal  $\gamma$ , la altitud real H por la que se quiere calcular  $H_N$ :

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H_N} \int_0^{H_N} \gamma(z) dz$$

Este valor en aproximación esférica es:

$$\bar{\gamma} = \gamma \left( 1 - \frac{H_N}{R} \right)$$

Donde R es el radio de la tierra considerada como esférica.

Las altitudes normales  $H_N$  vienen dadas por:

$$H_N = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot dh_i}{\gamma \left( 1 - \frac{H_N}{R} \right)}$$

Como en esta fórmula  $H_N$  aparece también en el denominador, se procede a calcular  $H_N$  por aproximaciones sucesivas. Como  $\gamma$  se refiere al campo del elipsoide y  $dh$  está medido como

desnivel referido al geoides, la fórmula supone una aproximación a  $h$ , en la que se mezclan elementos del campo real y del normal de la gravedad.

*Teluroide y Cuasigeoide:*

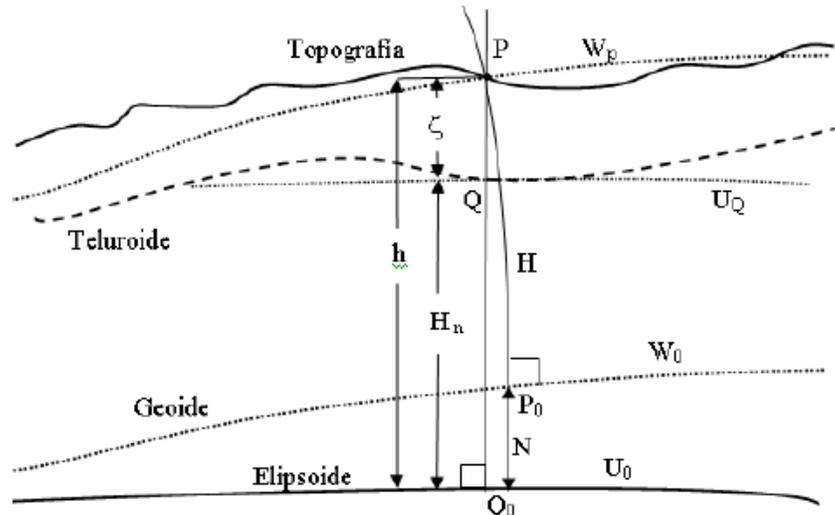


Figura 16

La altura normal tiene una clara interpretación geométrica. Es la distancia desde el punto Q hasta el elipsoide de referencia a lo largo de la normal al mismo.

Definimos una superficie llamada Teluroide a partir de los puntos en los que el potencial normal ( $U$ ) iguala el potencial real ( $W$ ) en la superficie. En consecuencia, será:

$$W(P) = U(Q) \quad \text{y} \quad W(P_0) = U(Q_0)$$

La anomalía de altura,  $\zeta$ , es la altura sobre el teluroide. Representa una medida geométrica de la diferencia entre las superficies de potencial real en la superficie y el mismo potencial de la Tierra normal.

La gravedad normal media, que divide al número geopotencial  $C$  calculado de la nivelación, es fácilmente calculable a partir del modelo sin necesidad de hipótesis sobre la distribución de masas.

Pero lo conveniente es que las alturas se midan al punto P, como ocurre con H, y no al teórico punto Q en el interior de la corteza.

Por eso, las alturas normales se trasladan hacia arriba hasta la superficie topográfica. Por abajo queda definida una nueva superficie llamada cuasi-geoides que se eleva en la anomalía de altura.

Finalmente, a partir de GPS se obtiene la altura elipsoidal  $h$  (Fig. 14 y 16), que se mide sobre la normal al elipsoide entre  $Q_0$  y P.

Considerando la desviación de la vertical y la curvatura de la línea sobre la que se mide  $H$ , con muy buena aproximación puede escribirse:

$$h = H + N = H_N + \zeta$$

Entonces:

$$N - \zeta = H_N - H = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H$$

Por consiguiente

$$N - \zeta = H_N - H = \frac{AB}{\bar{\gamma}} H$$

Con  $AB$ : Anomalía de Bouguer.

Las diferencias entre  $\zeta$  y  $N$ , son cero en los océanos, decimétricas en continentes y en cordilleras pueden ser métricas.

## ALTITUD ORTOMÉTRICA

La altitud ortométrica se refiere a la solución más aproximada de la ecuación (21). Se pretende obtener una medida directa del valor de  $H$ , distancia desde el punto cuya altitud deseamos calcular y del geoide bajo ese punto, a partir de los desniveles y la gravedad medidos en la superficie.

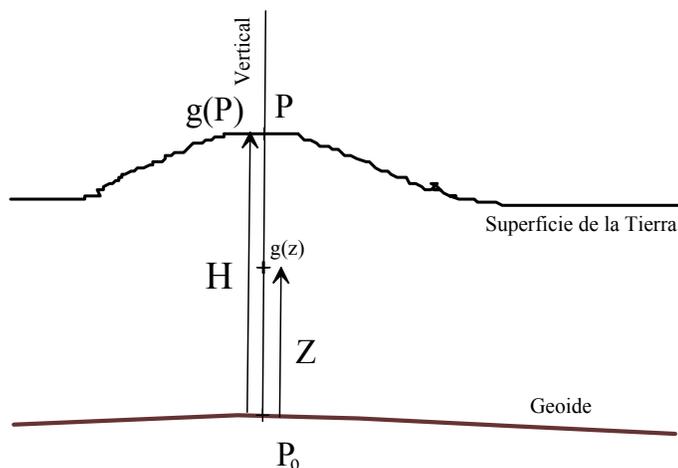


Figura 16: Reducción de de la gravedad a g medio.

La determinación de altitudes ortométricas exige la solución de la integral (22) para determinar el valor de  $\bar{g}$ , es decir el valor de  $g(z)$  medido a lo largo de la línea de la plomada. La dificultad en encontrar esta solución hace que se empleen aproximaciones. Una, usada muy comúnmente, debida a Poincaré y Prey, es:

$$g(z) = g + 0.0848 (H - z)$$

con  $g$  medida en el punto  $P$ . La

integral queda:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H [g + 0.0848(H - z)] dz = g + \frac{1}{H} \cdot 0.0848 \left[ Hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^H = g + 0.0424.H$$

con  $g$  en Gals y  $H$  en km.

El factor 0.0424 es válido para la densidad normal  $\sigma=2.67 \text{ g cm}^{-3}$ . La correspondiente fórmula para densidad constante arbitraria es:

$$\bar{g} = g - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 2\pi G \sigma \right) \cdot H$$

Las altitudes resultantes reciben el nombre de altitudes ortométricas del Helmert (1890).

En la práctica uno de los métodos para calcular la cota ortométrica  $H_p$ , se describe a continuación:

$$\text{Partiendo de la cota geopotencial } C_p = \sum_{i=0}^p g_i \Delta h_i ,$$

$$H_p \cong \frac{C_p}{g + 0.0424 \cdot H_p}$$

Esta aproximación sustituye el terreno por una lámina de Bouguer infinita de densidad constante y altura  $H$ . A veces en altas montañas y para muy alta precisión es necesario aplicar a  $g$  una reducción de Prey más rigurosa (Ver capítulo 4 de Heiskanen y Moritz, 1985).

## Bibliografía

Blakely, R. 1995. *Potencial Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge U. Press. 441 pp.

Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, Subcomité de Geodesia, Grupo de trabajo Sistemas Geodésicos, 1999. *Sistemas Geodésicos*. 61pp.

Förste, C., Schmidt, R., Stubenvoll, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, H., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Bruinsma, S., Loyer, S., Barthelmes, F., and Esselborn, S., 2007. The GeoForschungsZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Geodesie Spatiale satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C. *Journal of Geodesy*, doi:10.1007/s00190-007-0183-8.

*Contribuciones a la Geodesia en la Argentina de Fines del Siglo XX*, 1999. Editor Antonio Introcaso. UNR Editora. 293 pp.

Heiskanen W. A. and H. Moritz, 1982. *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional-Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid, España. 371 pp.

Heiskanen, W., Moritz, H., 1967. *Physical Geodesy*. W. Freeman and Company. 364 p.

Introcaso, A., 1997. *Gravimetría*. Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, 350pp.

Lemoine, F., Kenyon, S., Factor, J., Trimmer, R., Pavlis, N., Chiuw, D., Cox, C., Klosko, S., Lutheke, S., Torrence, M., Wang, Y., Williamson, R., Pavlis, H., Rapp, R., Olson, T., 1998. The

development of the joint NASA, CSFC and NIMA geopotential model EGM96, NASA/TP, 1998 – 206861, Goddard Space Flight Center.

Pavlis, N., Holmes, S., Kenyon, S., Factor, J., 2008. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly 2008 Presentation, European Geosciences Union General Assembly, Vienna, April 13-18, 2008. <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/Gravitymod/egm2008>.

Torge, W. 2001. *Geodesy*. 3rd. Edition, De Gruyter. 416 p., Berlín.

Torge, W., 1989. *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin. 465 pp.

Turcotte, D.L., Schubert, G., 2002. *Geodynamics*, Second Edition. Cambridge University Press, pp. 472.

Turcotte, D. L. and G. Schubert, 1982. *Geodynamics*. Wiley & Sons. 450 pp.

Udías Villana A. y Mezcua Rodríguez, 1986 y 1995. *Fundamentos de Geofísica*. Ed. Alambra. 419 pp.