

VISION ESTEREOSCOPICA

1.- La visión estereoscópica directa

La visión estereoscópica es una facultad físico - psicológica que posee el ser humano, que le permite ver en tercera dimensión aquellos objetos que contempla mediante su visión binocular.

Sobre cada una de las retinas de ambos ojos, se forma una imagen perspectiva del mismo objeto, las cuales difieren entre sí, debido a la distinta posición de los puntos de vista, produciendo el efecto de relieve.

La distancia entre estos dos puntos de vista, o sea, la separación entre los órganos receptores del ser humano, tiene un valor promedio de 65 mm y se la llama "distancia interpupilar".

Veamos cual es el proceso desarrollado durante la observación de un punto P, situado en el espacio objeto (Fig. 1). Cada uno de los ejes ópticos de los cristalinis rotan en el interior de su órbita, hasta que sus direcciones intersectan el punto P en cuestión, proceso éste que llamaremos "convergencia", tal que las imágenes P' y P'' se forman en una pequeña fosa existente en las retinas (mancha amarilla).

Tal convergencia que puede ser realizada a ojo desnudo desde una distancia de 150 mm en adelante.

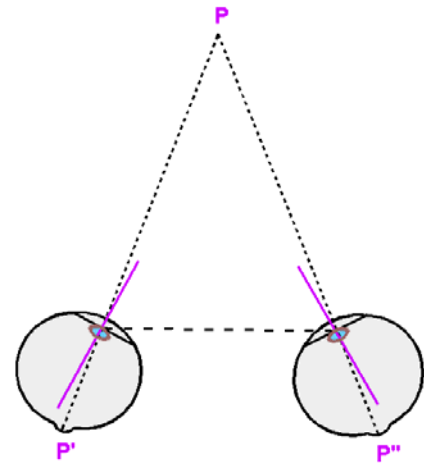


Fig.1

Las direcciones se dirigen siempre a un punto en el que se cortan los rayos visuales, es decir que éstos se encuentran siempre en un plano determinado por el centro de giro de los dos ojos y el objeto observado, que llamaremos "plano visual".

Cuando se observa un objeto situado en el infinito los cristalinis están en reposo y los ejes ópticos paralelos.

Conjuntamente con la convergencia, se produce otro proceso llamado "acomodación", en el cual los músculos ciliares ubicados en los extremos del cristalino, provocan un cambio en su radio de curvatura y con ello una mayor o menor convexidad, de tal manera que resultan nítidas las imágenes P' y P'' sobre las manchas amarillas.

La capacidad de acomodación para objetos cercanos determina la mínima distancia de aquellos, cuyo relieve podemos percibir con completa claridad. Para vista normal esta "distancia mínima de visión clara" es de 250 mm.

El límite hasta el cual puede reconocerse que dos puntos del espacio objeto se hallan a distancias diferentes, viene determinado por el ángulo mínimo de agudeza visual, la cual constituye la facultad especial de apreciación del relieve estereoscópico.

Sean (P y P') dos puntos del objeto; (b) la separación entre los dos ejes (base de observación); (δ) el ángulo de convergencia de los ejes visuales (ángulo paraláctico). Designamos (A) a la distancia del punto (P) a la base (b), y por ($d\delta$) al ángulo de agudeza visual estereoscópica, cuyos límites pueden variar entre 10" y 30" según el observador.

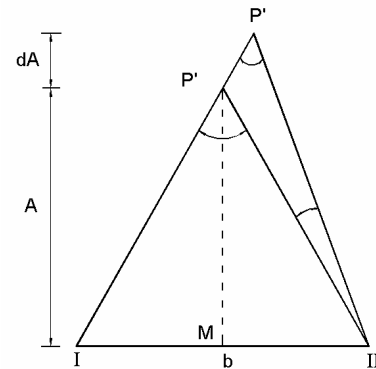


Fig.2

Del triángulo rectángulo PM.II obtenemos: (Fig.2).

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta / 2 &= b / 2 : A \\ \delta / 2 &= (b / 2) \cdot (1 / A) \quad \text{o sea} \quad \delta = b / A \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{de (1) tendremos: } b = \delta \cdot A \quad (1a) \quad \text{y} \quad A = b / \delta \quad (1b)$$

diferenciando (1a) (1b), teniendo en cuenta que $b = 65 \text{ mm} = \text{constante}$, tendremos:

$$dA = -(b / \delta^2) \cdot d\delta \quad (2)$$

Si (δ) desciende hasta valores próximos a ($d\delta$), la apreciación del relieve deja de ser posible. Si reemplazamos en (2) la expresión hallada en (1) elevada al cuadrado, tendremos:

$$dA = -(A^2 / b) \cdot d\delta \quad (3)$$

La fórmula (3) expresa el límite de percepción del relieve, o sea, la menor diferencia apreciable (dA) entre las distancias de dos puntos situados en el espacio objeto.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} d\delta &= 15'' = (1/13.600) \\ b &= 75 \text{ mm} \\ A &= 100 \text{ mts} \\ dA &= 10 \text{ mts} \end{aligned}$$

La fórmula (1b) expresa el "radio de campo visible estereoscópicamente", utilizando por ejemplo:

$$\begin{aligned} d\delta &= 30'' \\ b &= 65 \text{ mm} \end{aligned}$$

se obtendrá:

$$A = b / \delta = 65 \text{ mm} \times 6800 = 442 \text{ mts}$$

Todos los objetos situados a distancias mayores que 450 mts, aparecen sin relieve, es decir en un plano.

3.- Condiciones para la percepción del relieve

Una sola imagen fotográfica no puede suministrar la impresión de relieve o profundidad, por cuanto todos aquellos puntos que la constituyen, se encuentran proyectados sobre el mismo plano.

Para obtener un efecto de relieve hay que llenar ciertas condiciones que corresponden a las de la visión binocular natural:

- 1) Cada ojo ha de observar una imagen desde el punto de vista o centro de proyección distinto del de la imagen observada por el otro.
- 2) Las imágenes han de presentarse a los ojos de tal manera que los "pares de rayos correspondientes" a puntos homólogos de las dos vistas, se corten.
- 3) La necesaria convergencia de los rayos luminosos no deberá exceder el límite de la convergencia natural de los ojos, que es de unos 20° .

4.-Visión estereoscópica indirecta

La visión estereoscópica directa del ser humano puede ser remplazada en forma artificial con el empleo de "medios ópticos auxiliares", tal que en lugar de ser los objetos los que se presentan a la vista, sean sus imágenes las que lo hacen.

Como los pares de fotografías aéreas consecutivas durante el vuelo, presentan una misma porción del terreno, que a primera vista aparecen como idénticas (pero como debido a que han sido tomadas con un intervalo de tiempo durante el cual el avión se ha desplazado) podremos en consecuencia decir que se han obtenido dos imágenes perspectivas de un mismo objeto, tomadas desde diferentes puntos de vista y por lo tanto, pueden reemplazar a la doble imagen percibida por el ser humano, a ojo desnudo.

Disponiendo en gabinete de "un instrumento óptico de observación" apropiado, podremos presentar aisladamente cada fotografía a cada ojo, entonces el sistema físico - psicológico del ser humano será quien se encargue de fusionar el contenido común de ambas fotografías en un solo "modelo plástico estéreo u óptico tridimensional" (piénsese en una maqueta).

- A. Si usted mira desde arriba la maqueta de una fábrica, en la retina de su ojo derecho la imagen de la chimenea es un círculo; en la retina del ojo izquierdo dicha imagen es un trapecio alargado. El cerebro combina las dos imágenes y reconstruye la chimenea en el espacio.

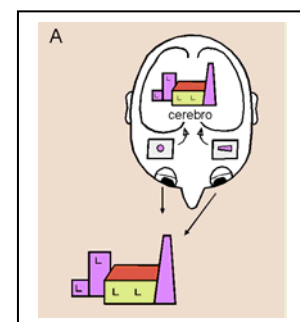


Fig.3a

- B. Un avión saca dos tomas consecutivas de la fábrica. En la primera fotografía la imagen de la chimenea es un círculo. En la segunda fotografía, la imagen de la chimenea es un trapecio alargado.

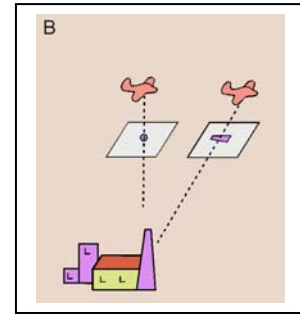


Fig.3b

- C. Examine usted las fotografías respectivas con un "dispositivo óptico auxiliar" que permita a cada ojo ver una sola fotografía. En la retina del ojo derecho se forma la imagen de la chimenea (círculo) y en la retina del ojo izquierdo se forma la otra imagen de la chimenea (trapecio alargado). Como en el caso A, el cerebro combina ambas imágenes y el observador tiene la impresión de ver la chimenea en el espacio.

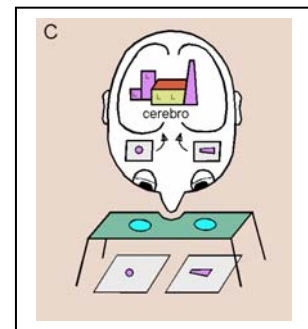


Fig.3c

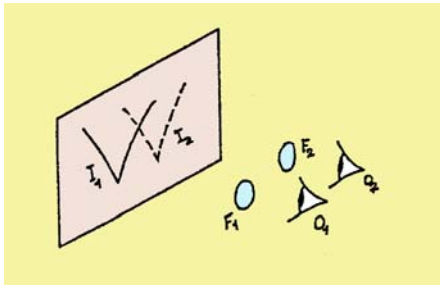
4) Métodos ópticos auxiliares para la observación estereoscópica

El problema de presentar a cada ojo una imagen puede resolverse con el empleo de medios ópticos auxiliares, entre los cuales podremos citar (por su extensa aplicación en la Fotogrametría) a los "estereoscopios".

Otro sistema que aplica medios artificiales es el de los "anaglifos", que todos recordamos de las funciones de cine "tridimensional", cuando a la entrada nos entregaban un par de lentes de papel con diferentes colores para cada ojo. Este método, que no se utiliza en fotointerpretación, merece de todos modos que lo citemos aclarando algo de qué se trata (si bien existen restituidores a anaglifo).

Existen dos procedimientos: uno por impresión, y el otro por proyección (que es el del cine y aquí no nos interesa). En el primero, las imágenes fotográficas están impresas sobre un papel blanco, la perspectiva de la izquierda normalmente en verde y de la derecha en rojo. Estas imágenes son examinadas a través de filtros de colores: rojo para el ojo izquierdo, y verde para el derecho. Si los tonos y las intensidades han sido bien elegidas cada ojo no distinguirá más que una de las perspectivas.

I_1 destinada al ojo O_1 está en verde; mientras que I_2 para el ojo O_2 está en rojo (color complementario). El filtro F_1 es rojo y la imagen I_1 se verá negra sobre el fondo rojo (I_2 rojo sobre rojo no la ve O_1). El filtro F_2 es verde y la imagen I_2 será vista en negro sobre fondo verde por O_2 , mientras que I_1 verde sobre verde no se ve.



Al fusionarse ambas imágenes vemos negro sobre fondo blanco (casi) por superposición de dos colores complementarios.

Fig.4

Al examinar el conjunto con un filtro rojo la parte verde parece negra, mientras que la parte roja no se distingue del fondo blanco, que parece también en rojo: la perspectiva izquierda se ve negra sobre fondo rojo. Del mismo modo, la perspectiva derecha se ve negra sobre fondo verde a través del filtro verde. Las dos perspectivas se ven entonces en negro, una para cada ojo, y en el cerebro se fusionan percibiendo éste una sola imagen en relieve, cualquiera sea la distancia de examen, con la condición de que la línea de los ojos sea paralela a la base del par. Pero pasemos a los estereoscopios, que serán nuestra herramienta básica.

Estereoscopios: Son dispositivos ópticos cuya función es permitir que cada ojo observe, en forma separada, imágenes diferentes. Esto es posible ya que la observación se realiza a través de lentes en cuyo plano focal se encuentran las imágenes, haciendo la visión cómoda para el observador. Si las imágenes pertenecen a dos vistas perspectivas de un mismo objeto, el cerebro combinará ambas imágenes, dando al observador la impresión de ver al objeto real.

Los estereoscopios pueden ser del tipo "de lentes", "de espejos" o "combinación de espejos y prismas".

Estereoscopios de lentes (David Brewster - 1849)

En él se colocan las fotografías en el "plano focal" F'_1 y F'_2 de dos lentes de aumento O_1 y O_2 , tal manera que la distancia entre dos puntos homólogos lejanos sea igual a la distancia entre los "puntos nodales" de las dos lentes.

Las direcciones de los puntos lejanos aparecen al observador, paralelas y las fotografías en sí, ópticamente, en el infinito. Así es que el observador mira a los puntos lejanos sin esfuerzo alguno de los ojos, que miran como si no tuviesen delante instrumento alguno.

Como detrás de las lentes todos los rayos que proceden de puntos lejanos pertenecientes a las fotografías son paralelos, la separación de los ojos ($A_1 - A_2$) de los distintos observadores no tiene importancia en tanto que la abertura de las lentes permita mirar a su través.

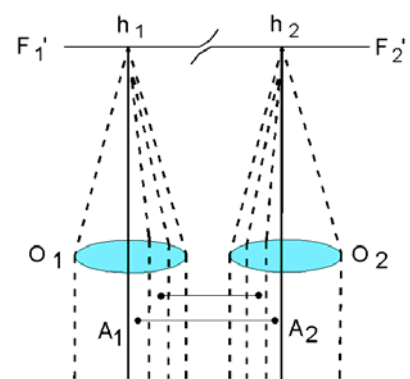


Fig.5

Si la distancia entre dos imágenes correspondientes a un mismo punto es menor que la distancia entre los puntos nodales de las lentes, no se puede verificar la observación con ojos paralelos sino haciendo converger las visuales en un ángulo que, si es grande exige separar la vista del plano focal y acercarlas a las lentes para efectuar la acomodación.

El estereoscopio tipo Brewster tiene el inconveniente de que la distancia entre las imágenes correspondientes a un mismo punto no puede ser mayor que la distancia interpupilar adicionado con el diámetro de una lente, o sea 80 mm promedio, siendo por lo tanto muy limitado el campo de observación que pueda abarcarse de una ojeada, es decir que al querer examinar un par de fotografías se lo hará en pequeñas superficies de la misma o a veces superponiendo o doblando las fotografías.

Este tipo de estereoscopio, es uno de los más utilizados por ser barato, portátil y simple de operar y mantener.

Estereoscopio de espejos (Robert Wheasttone - 1838)

El mismo consiste en dos espejos que reflejan las imágenes provenientes de un par de fotografías (coloreadas verticalmente) directamente hacia los ojos del observador.

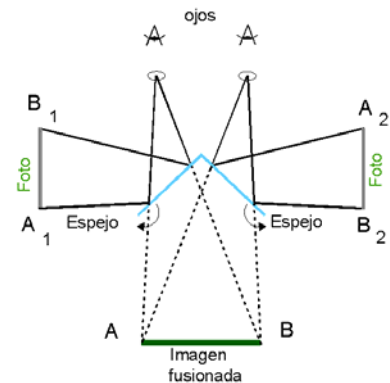


Fig.6

Una variante de este tipo de estereoscopio, lo constituye el construido por Helmholtz en 1857, cuyo diseño de cuatro espejos es similar a los actualmente en uso.

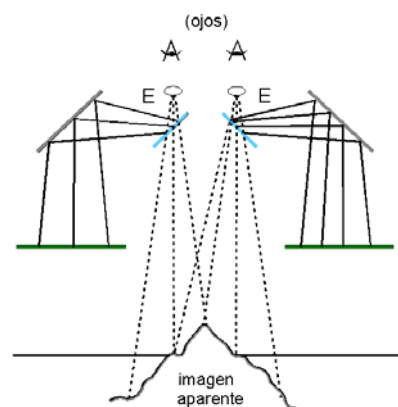


Fig.7

Estereoscopios de espejos y prismas

Basado en el principio de Helmholtz, podemos encontrar otra variante, la cual consiste en reemplazar dos de los cuatro espejos por prismas (B - B')

El desplazamiento paralelo de los rayos de observación con respecto a los ojos del observador, obtenido mediante dos reflexiones tanto en B como en C, permite colocar debajo del estereoscopio, fotografías de tamaño mayor sin que éstas se superpongan entre sí.

En este tipo de estereoscopio se obtienen las reflexiones por medio de espejos en C - C' y mediante prismas en B - B'. Además es posible intercalar otros prismas entre E (E) y A (A) para desviar el rayo de manera que permita la visión oblicua del par, lo cual permite adoptar una postura cómoda de observación (sentado).

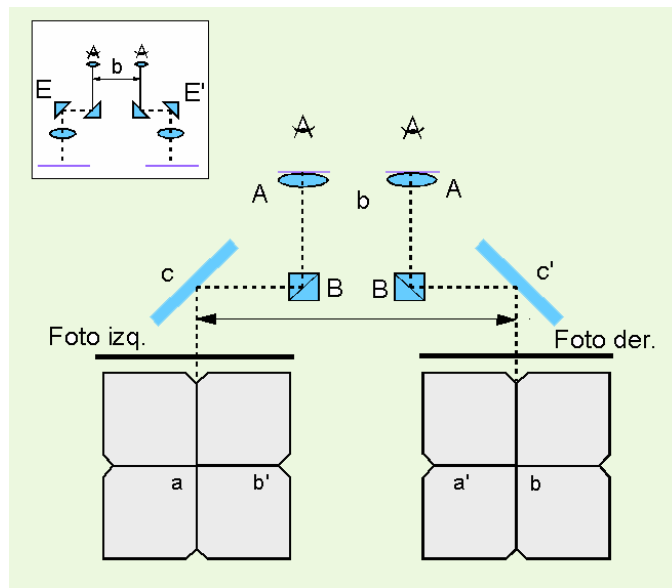
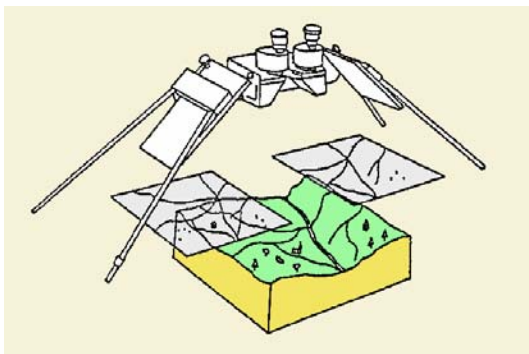


Fig.8

Un dispositivo de observación está constituido por dos oculares y un par de prismas, formando dos bloques que pueden ajustarse según una distancia variable entre sí como la distancia interpupilar del observador.

Sus ventajas se manifiestan al poder separar completamente el par de fotografías sobre el tablero, examinar la totalidad del modelo estereoscópico formado por ellas bajo observación normal (sin binoculares), permiten el uso de copias opacas sobre papel, transparencias negativas o positivas.



Las desventajas respecto a los estereoscopios de lentes son su precio más elevado, pérdida relativa de iluminación debido al número de superficies ópticas que incluye y a las distancias que los rayos de luz deben seguir, es menos portátil y requiere mayor mantenimiento (especialmente en lo que concierne a los espejos) proclives a rotura durante el manejo excesivo.

6.- Orientación de fotografías debajo del estereoscopio:

En un principio se ajustará la distancia interocular del estereoscopio en correspondencia con la distancia interpupilar del observador.

- 1- Se determina el punto principal. de cada fotografía, con ayuda de las marcas fiduciales, se lo marca con dos pequeñas líneas en lápiz.
- 2- El punto principal de la fotografía izquierda es identificado y marcado en la fotografía derecha en lápiz, se repite la operación para determinar el punto homólogo del centro de la fotografía derecha sobre la izquierda.
- 3- Los dos puntos principales que aparecen sobre cada una de las fotos (propio y homólogo de la otra) son alineados con el auxilio de una regla, y la línea correspondiente que pasa por ellos es marcada con lápiz, solo en los bordes externos de cada fotografía.
- 4- Sobre la mesa que servirá de base, se traza una línea recta, digamos de 40 cm sobre la cual se fijarán las fotografías de manera tal que los cuatro puntos homólogos aa'' (o bb') sea igual a la distancia interocular de un estereoscopio de refracción (65 mm) o bien aa' la distancia interocular ampliada, como es el caso en los estereoscopios a espejos (210 mm Zeiss N2, 253 mm Wild ST 3).

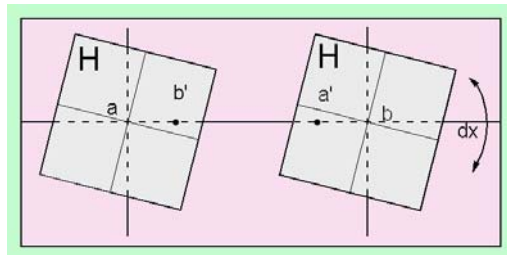


Fig.10

- 5- Control de la alineación ab' y $a'b$, así como el caso de la distancia aa' se realiza con una regla milimetrada después de fijar la fotografía izquierda y antes de fijar la derecha. Las fotografías deben colocarse bien planas, a fin de evitar que se produzca una deformación general del relieve del terreno.
- 6- Para proceder al examen del par, el estereoscopio debe ser colocado de manera que la recta que une el centro de los dos oculares sea paralela a la línea recta auxiliar trazada sobre la mesa que sirve de base y que se utilizó para la unión de los puntos homólogos ab .
- 7- Para examinar en su totalidad la superficie del terreno común a dos fotografías, se desplazará al estereoscopio por translación.

7).- Hiperestereoscopía y Pseudoscopía

Hiperestereoscopía:

Se dice que existe hiperestereoscopia, cuando se aumenta artificialmente la impresión natural del relieve. Para ello es necesario aumentar las paralajes estereoscópicas. Se puede lograr esto recurriendo a dos factores diferentes:

- Utilizando perspectivas fotográficas. Donde la distancia entre puntos de vista o exposición, es mucho mayor que la distancia interpupilar. O sea aumentando la base de observación "b" por un factor "n", tal que $b.n = B$, donde la razón $n = B / b$ se denomina "efecto plástico específico"
- Utilizando un aumento óptico "C" en el sistema de observación. mediante esta solución el observador multiplica por cierto factor de agrandamiento el ángulo bajo el cual ven sus ojos cualquier punto del espacio objeto.
Si se emplean los dos modos de aumento, las paralajes estereoscópicas quedan multiplicadas por un factor "C . n" que se denomina "efecto plástico total".

Pseudoscopia:

La perfecta orientación de los pares de fotografías se pone de manifiesto cuando las sombras caen hacia el observador, en el caso inverso, se produce un efecto de bajo-relieve, denominado Pseudoscopia, el mismo se produce cuando el terreno observado es a la inversa del relieve natural, o sea los puntos más alejados aparecen como los más próximos. Este efecto puede lograrse cuando las fotografías están permutadas (el ojo izquierdo ve la perspectiva derecha y recíprocamente) o bien cuando sin permutar las perspectivas fotográficas, las mismas han recibido simultáneamente una rotación de 180° en su plano.

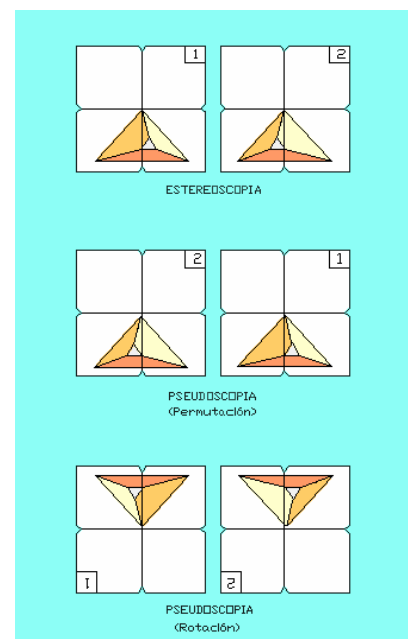


Fig.11

Paralaje estereoscópica

La Fig. 12 representa esquemáticamente a dos fotografías aéreas verticales consecutivas. Para su mejor comprensión supondremos que ambas fotografías están en su plano positivo, ello significa que la imagen fotográfica está hacia arriba. O' y O'' son los centros de perspectiva y B la base aérea.

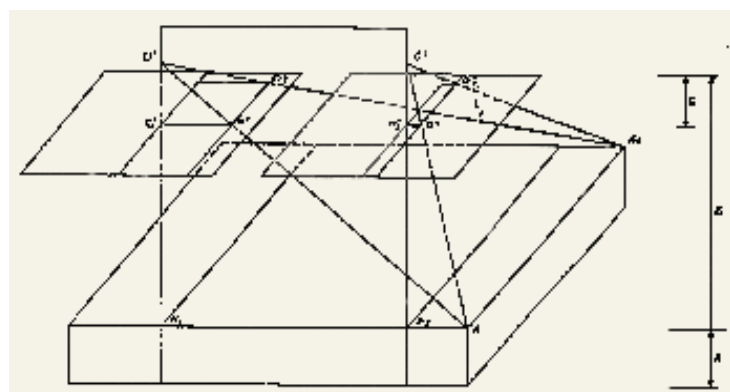


Fig.12

Un punto A del terreno, tendrá su imagen a' en la fotografía izquierda y a'' en la derecha.

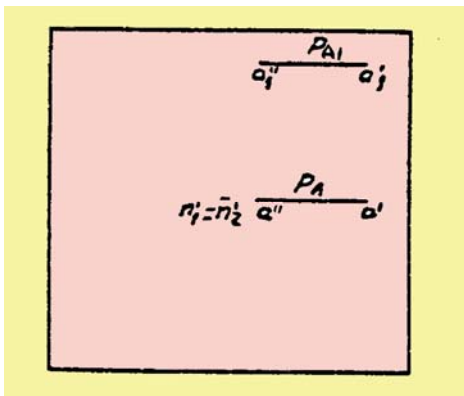


Fig. 13

En la Fig. 13 superponemos las dos fotografías anteriores tal que coincidan los puntos nadirales n_1 y n_2 , vemos que los puntos imágenes a' y a'' ocupan distintas posiciones, debido a que la cámara aérea se desplazó de la posición O' hacia O''.

Este cambio posicional de la imagen de un punto del terreno, debido al cambio posicional de la cámara aérea o lugar de observación se define como "paralaje estereoscópica del punto A", y la indicamos P_A .

En la Fig. 14, las dos fotografías se superponen como en la Fig. 13, pero son mostradas según el plano de proyección vertical, en donde los centros de perspectiva coinciden. Tanto en esta figura como en la anterior es fácil ver que $P_A = P_{A1}$, si bien A y A_1 . Son puntos diferentes del terreno, los mismos tienen en común que están situados a la misma altura con respecto al plano de referencia.

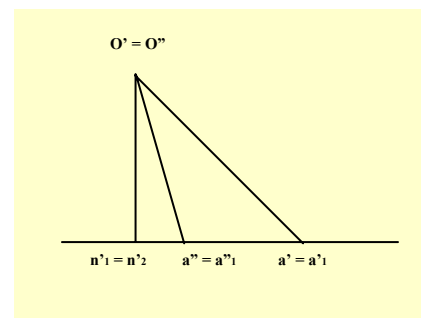


Fig. 14

Conclusión: todos los puntos del terreno que pertenecen al mismo plano horizontal tienen paralajes estereoscópicas iguales, en dos fotografías aéreas verticales consecutivas.

Diferencias de paralajes estereoscópicas

En la Fig. 15 se observa una pirámide de base cuadrada A B C D y vértice T es fotografiada desde dos estaciones de toma O' y O'' diferentes. Las dos fotografías resultantes las superpondremos, tal que sus puntos nadirales coincidan, según Fig. 16.

Las paralajes estereoscópicas de los puntos A, B, C y D de acuerdo a la definición dada son de igual magnitud ($P_A = P_B = P_C = P_D$), puesto que los citados puntos pertenecen al mismo plano horizontal, sin embargo el punto T (vértice de la pirámide) está por encima del citado plano horizontal y su paralaje estereoscópica P_T difiere de las cuatro anteriores. Los puntos imágenes t' y t'' son excéntricos, es decir están desplazados con respecto a su verdadera posición debido al "desplazamiento por relieve" originado por la diferencia de altura H.

La diferencia entre las distancias existentes entre dos pares de puntos imágenes correspondientes es igual a la diferencia de paralaje.

$$P_{AT} = P_A - P_T = a'a'' - t't''$$

Conclusión: La "diferencia de paralaje" está relacionada directamente con la diferencia altimétrica.

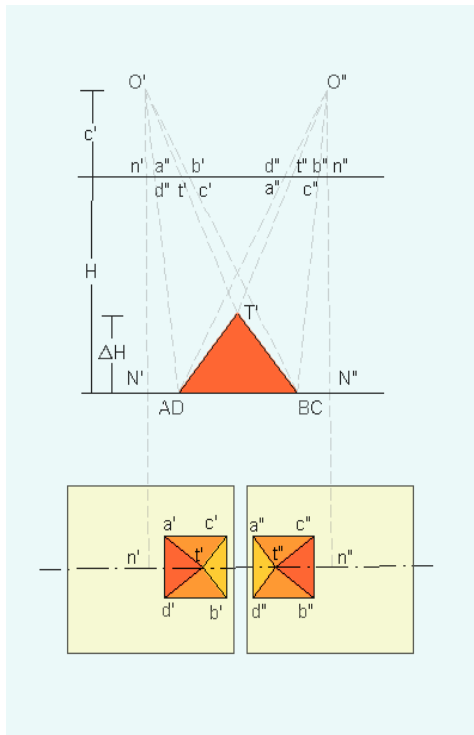


Fig.15

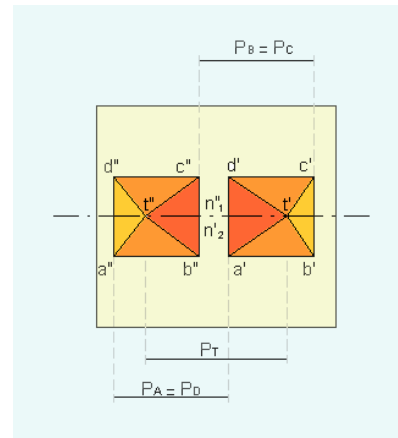


Fig.16

Principio de la marca flotante

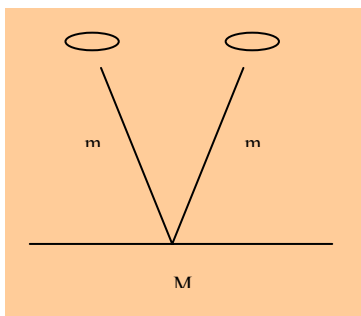


Fig.17

Si los ojos del observador son enfocados sobre un punto objeto A (por ejemplo un punto sobre una mesa) y si dos pequeñas marcas de igual forma y tamaño son colocadas en el camino óptico de los rayos visuales provenientes del punto A, y que se dirigen a los ojos, se observará que las dos marcas serán percibidas como un punto M posado sobre el punto objeto A (Fig. 17).

Para ilustrar este principio, supongamos que durante la observación estereoscópica de un par de fotografías, ajustamos una marca, que llamaremos "marca de medición" m_1 sobre un detalle del terreno que aparece sobre la copia fotográfica derecha (Fig. 18).

Procederemos luego a ajustar la otra marca de medición sobre la imagen fotográfica izquierda correspondiente al mismo detalle del terreno.

Si ambas marcas de medición son ajustadas exactamente sobre los puntos imagen (m_1 izq. y m_1 der.), el observador las percibirá como una sola marca, posada exactamente sobre el correspondiente punto imagen M_1 tal cual se lo ve estereoscópicamente.

Si el proceso de ajuste de la marca de medición izquierda no se realiza con exactitud, es decir, por ejemplo: se la coloca en m_2 ó en m_3 , esto dará lugar a que el observador perciba a la única marca "por encima" o "por debajo" del punto imagen M_1 , estereoscópicamente concebido, es decir en M_2 o en M_3 .

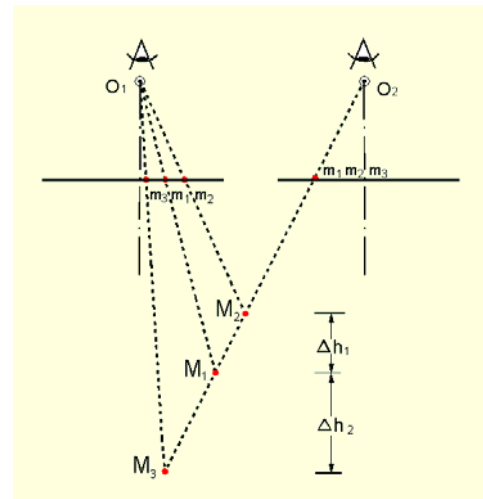


Fig.18

Si la distancia entre las marcas de medición (izquierda y derecha) es variada, esto da lugar a percibir el movimiento de la fusionada marca en el sentido de profundidad o altura, de allí que esta única marca, resultante de la fusión de las marcas de medición, se la conozca como "marca flotante" o "marca espacial".

El principio de la marca flotante, como tal es aplicado para el ajuste de un punto situado sobre el modelo estereoscópico. En la Fig. 19, se da una idea de cómo el observador concibe el movimiento de las marcas de medición entre dos puntos extremos sobre el plano de la imagen y también, cómo la marca flotante se ajusta sobre el modelo.

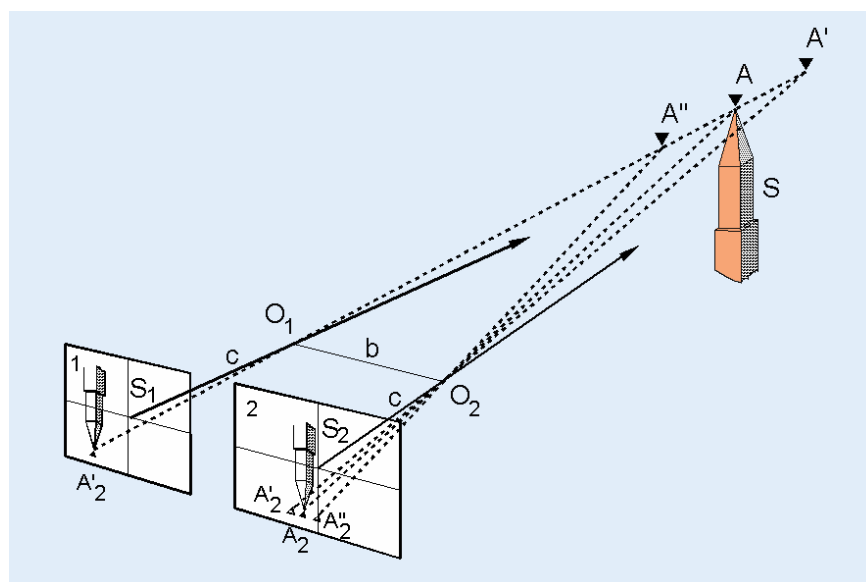
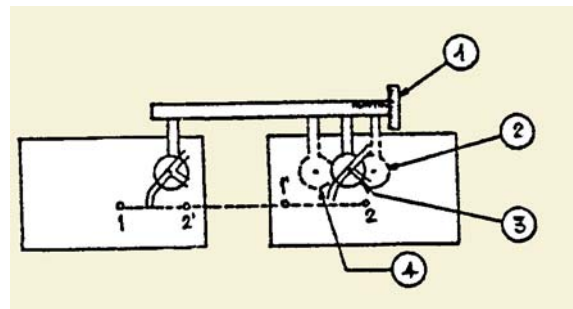


Fig.19

Barra de paralaje

El principio de la marca flotante, es materializado mediante dos plaquitas de cristal colocadas directamente debajo de cada espejo del estereoscopio, tal que permanezcan planas sobre las fotografías aéreas. Sobre cada placa de cristal se halla grabada una marca, del tipo puntiforme, anular, cruz, etc., que puede ser fusionada estereoscópicamente entre sí, tal como ocurre con los puntos imágenes correspondientes sobre las dos fotografías.



1- Tornillo micrométrico 3- Marca flotante apoyada
 2- Marca flotante baía 4- Marca flotante alta

Fig. 20

Además debe existir la posibilidad que, por lo menos una de las plaquitas pueda ser desplazada con respecto a la otra, para permitir que la fusionada imagen de la marca flotante, se ajuste directamente sobre la imagen correspondiente de la fotografía aérea. Para ello se conectan las dos plaquitas a una barra, sobre la cual el movimiento relativo de la primera es controlado por un tornillo micrométrico, sobre cuya escala se puede leer el valor de cualquier ajuste de la marca flotante.

Formula de la paralaje

Tal como ha sido mencionado, existe una relación directa entre "las diferencias de paralaje" y "las diferencias de alturas". La fórmula de la paralaje que sirve para calcular diferencias de altura, resulta de las relaciones geométricas que existen entre los triángulos semejantes $AO''O'$ y $O''a''a'$ de la Fig. 21, en la cual vemos que para cualquier punto del terreno, tal como el A, se cumple:

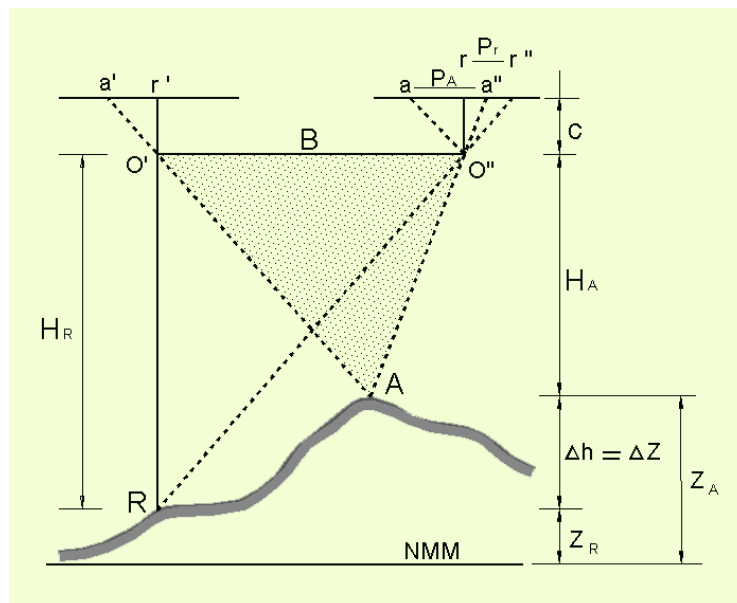


Fig. 21

$$\frac{H_A}{B} = \frac{c}{P_A} \quad \text{de donde} \quad H_A = \frac{B * c}{P_A} \quad (1)$$

Para un punto R (punto de referencia), de igual manera se obtiene

$$\frac{H_R}{B} = \frac{c}{P_R} \quad \text{de donde} \quad H_R = \frac{B * c}{P_R} \quad (2)$$

La diferencia de altura de vuelo entre los puntos A y R es igual a:

$$\Delta H = H_A - H_R = B * c * \left(\frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_R} \right) = B * c * \frac{P_R - P_A}{P_A * P_R} \quad (3)$$

$$\text{Si} \quad \Delta P = P_A - P_R \quad (4)$$

entonces:

$$P_R - P_A = -\Delta P \quad \text{y} \quad P_A = P_R + \Delta P \quad (5)$$

expresión ésta que se puede simplificar teniendo en cuenta (4) y (5), quedando entonces:

$$\Delta H = -\frac{B * c}{P_R} * \frac{\Delta P}{P_R + \Delta P} \quad (6)$$

Luego, sustituyendo la expresión (2) en la (6), se obtiene:

$$\Delta H = -\frac{H_R}{P_R + \Delta P} * \Delta P \quad (7)$$

En esta expresión aparece el signo "menos", y recordando que en la (3) se definió:

$$\Delta H = -(H_A - H_R)$$

Donde ΔH , es positiva, si la altura de vuelo sobre el punto A es mayor que la correspondiente a R, ($H_A > H_R$).

Para evitar confusiones es conveniente hablar de alturas de los puntos A y R con respecto a un plano de referencia, en este caso será ($Z_R > Z_A$) y la diferencia ($Z_R - Z_A = \Delta Z$) será positiva. Por lo tanto es conveniente reemplazar ΔH por ΔZ

Luego:

$$\Delta Z = -\Delta H \quad (8)$$

$$\Delta Z = \frac{H_R}{P_R + \Delta P} * \Delta P \quad (9)$$

Algunas veces es necesario calcular ΔP para un cierto ΔZ . Esto es posible utilizando la siguiente expresión

$$\Delta P = \frac{P_R}{H_R + \Delta Z} * \Delta Z \quad (10)$$

Conclusiones:

- 1) Si la altura del punto de referencia (R) es conocida la elevación de un punto (A) se puede calcular a partir de:

$$Z_A = Z_R + \Delta Z$$

$$Z_A = Z_R + \frac{H_R}{P_R + \Delta P} * \Delta P$$

- 2) El punto de referencia R teóricamente puede ser cualquier punto contenido en la parte superpuesta de las dos fotografías. Sin embargo se lo elige en la posición correspondiente al punto principal de una de ellas.

- 3) El terreno llano o con pendientes suaves ΔP será muy pequeño si se lo compara con P_R , por lo tanto se puede despreciar en el denominador de la expresión (9). Un caso similar ocurre con ΔZ en el denominador de la expresión (10), obteniéndose así expresiones simplificadas, tales como:

$$\Delta Z = \frac{H_R}{P_R} * \Delta P$$

$$\Delta P = \frac{P_R}{H_R} * \Delta Z$$
