

INTRODUCCION

AL

AJUSTE Y DISEÑO

DE

REDES TOPOGRAFICAS

Raúl Márquez



Departamento de Ingeniería en Agrimensura
Facultad de Ingeniería

----- Raúl Márquez, e-mail: ingramarquez@hotmail.com -----

PREFACIO

Esta publicación pretende ser una introducción al ajuste mínimos cuadrados y diseño de redes topográficas.

En el tema 1, se desarrolla la teoría clásica de los errores de observación y su propagación desde la probabilidad y estadística, tanto para observaciones independientes como para observaciones correlacionadas.

En el tema 2, se presenta la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes determinados e indeterminados, que aparecerán luego al plantear el sistema de las ecuaciones de observación en una red topográfica. Se tratan los casos de las matrices de rango completo correspondientes a las redes vinculadas y las matrices deficientes de rango, propias de las redes libres. La inversión de matrices simétricas, se resuelve por el método de diagonalización utilizando valores propios y vectores propios.

En el tema 3, se plantea el modelo funcional para redes libres y redes vinculadas a partir de las ecuaciones de observación. El modelo estocástico se plantea desde las variables aleatorias multidimensionales con distribución gaussiana. La propagación de los errores observacionales a los parámetros ajustados, se estima con las elipses de error absolutas a un cierto nivel de confianza, las que, a su vez, se obtienen de la distribución normal multivariable.

Se introducen conceptos de fiabilidad interna y externa delineando la teoría de Baarda. Así, los números de redundancia y los mínimos errores detectables de los observables contribuyen tanto a efectuar el control de calidad de la red, como a lograr un diseño satisfactorio de la misma.

En el tema 4, se discute cómo lograr un diseño satisfactorio para una red topográfica mediante el método "prueba y error", asistido por computadora. La simulación de la red y su ajuste, dan una respuesta a priori sobre lo que sucedería con la medición y el ajuste de la red real.

Estos temas, correspondientes a la asignatura "Cálculo de Compensación" de las carreras de Ingeniería en Agrimensura en nuestro país, pueden desarrollarse en un curso semestral con las debidas adaptaciones. Se requiere que los alumnos hayan cursado previamente asignaturas tales como Probabilidad y Estadística, Álgebra Lineal, Geometría Analítica y Topografía, entre otras.

Los profesionales independientes podrán utilizar el texto como material de consulta. El procesamiento numérico de los ejemplos presentados, se realizaron con aplicaciones MATLAB, desarrolladas para resolver el ajuste mínimos cuadrado y el diseño de redes topográficas.

San Juan, junio de 2009

Raúl Márquez

CONTENIDOS

TEMA 1: TEORÍA DE LOS ERRORES DE OBSERVACIÓN Y SU PROPAGACIÓN

Parte I: Teoría de los errores de observación

Errores groseros, sistemáticos y accidentales	7
Analogía con el tiro al blanco	8
Propiedades de la media aritmética	12
La media aritmética a partir de los mínimos cuadrados	13
Deducción de la curva de Gauss	14
Construcción de la curva de probabilidad	17
Media, varianza y desviación estándar	19
El error promedio o error aritmético	20
El error probable	20
El error medio cuadrático o error estándar de una observación	21
El error máximo tolerable	24
El error medio cuadrático de la media aritmética	25
Estimaciones de los errores medio cuadrático de una observación y de la media aritmética para una muestra de observaciones de tamaño n	27
El criterio de Chauvenet para el saneamiento de muestras	29
Intervalos de confianza para la media poblacional	31
Intervalos de confianza para la varianza y la desviación estándar	31

Parte II: Propagación de los errores de observación

Propagación de la varianza covarianza	33
La media ponderada	40
El error medio cuadrático o estándar de la observación de peso 1	42
El error estándar de la media ponderada	43
Observaciones de distinta precisión	44
Observaciones de igual precisión	44
Observaciones duplicadas	46
Propagación de los errores en la nivelación geométrica	48
Nivelación geométrica ida y vuelta	50
Propagación de los errores en la poligonación	53
Trabajo práctico 1: Parte I	59
Trabajo práctico 1: Parte II	61

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES INCONSISTENTES

El espacio columna EC_A de la matriz de coeficientes y el vector L de los términos independientes	69
La proyección ortogonal del vector L sobre el EC_A	70
La solución mínimos cuadrados. El sistema de las ecuaciones normales	72
Suficiencia e insuficiencia de rango de la matriz A de coeficientes y de la matriz normal N	74
La solución óptima de un sistema lineal inconsistente con matriz de coeficientes deficiente de rango	77

Inversión de matrices simétricas	81
Valores propios, vectores propios y diagonalización. Propiedades	82
La pseudoinversa de Moore-Penrose y la solución óptima de un sistema lineal inconsistente con matriz A deficiente de rango	85
Ejemplos y aplicaciones	87
Trabajo Practico 2	90

TEMA 3: ANALISIS DE REDES TOPOGRAFICAS

Redes planas: observables y parámetros	92
Las ecuaciones de observación linealizadas	94
El modelo funcional	94
La matriz de diseño A	95
La matriz de los términos independientes L	95
La matriz de los pesos P	96
Las ecuaciones normales.....	96
La solución mínimos cuadrados.....	96
Ecuaciones de observación para ángulos horizontales.....	97
Ecuaciones de observación para distancias reducidas.....	97
Redes planas libres y vinculadas.....	98
Ecuaciones de observación para coordenadas.....	98
Redes altimétricas: observables y parámetros.....	102
Las ecuaciones de observación para los desniveles observados.....	103
Las matrices A, L, P y el modelo funcional.....	103
Las ecuaciones normales y la solución mínimos cuadrados.....	104
Redes altimétricas libres y vinculadas.....	107
Propagación de los errores observables a los parámetros ajustados.....	109
Densidad de probabilidad y probabilidad acumulada.....	109
La media, expectación o esperanza matemática.....	109
La varianza y la desviación estándar.....	109
Distribución multivariable.....	112
Variables estocásticas multidimensionales.....	112
La función de densidad de probabilidad conjunta.....	112
Frecuencias o densidades marginales.....	113
Vector de medias.....	113
Varianza y covarianza.....	113
Correlación. Independencia estocástica.....	114
La matriz varianza covarianza.....	116
Propagación de la media.....	117
Propagación de la varianza covarianza.....	117
Distribución normal multivariable.....	118
Las elipses de error como regiones de confianza.....	122
Propagación de los errores de los observables a los parámetros ajustados.....	129
La prueba chi-cuadrado.....	132
Precisión del posicionamiento de los vértices de una red plana: elipses de error y curva podaria.....	134
Propagación de los errores de observación en el caso de una red altimétrica.....	138
Fiabilidad.....	138
Las matrices cofactor.....	139
Los números de redundancia.....	140

Control de los errores groseros.....	143
El test de Baarda.....	147
Fiabilidad interna.....	148
Fiabilidad externa.....	149
Trabajo practico 3.....	153

TEMA 4: DISEÑO, SIMULACION Y AJUSTE DE REDES TOPOGRAFICAS

Ejemplo introductorio.....	158
Diseño por computadora: El método “prueba y error”.....	161
Simulación.....	164
Ajustes libre y vinculado.....	164
La prueba F.....	173
Aplicaciones a redes planas y altimétricas.....	174
Trabajo práctico 4.....	179

BIBLIOGRAFIA:	180
----------------------------	-----

-----o-----

TEMA 1

**TEORIA DE LOS ERRORES DE OBSERVACION
Y
PROPAGACION**

PARTE 1: TEORIA DE LOS ERRORES DE OBSERVACION

Mediciones repetidas de una dada magnitud por un mismo observador, con un mismo instrumento y en circunstancias análogas, no conducen siempre a un mismo resultado. Este hecho muestra que las observaciones están afectadas de errores que es propio atribuir a los agentes que concurren a la medición; es decir:

- i) el observador
- ii) el instrumento
- iii) las condiciones ambientales

Por su naturaleza los errores de observación se clasifican en tres categorías:

- a) errores groseros
 - b) errores sistemáticos
 - c) errores accidentales
- a) Errores groseros: se caracterizan por el hecho de que su magnitud excede la que pueda preverse teniendo en cuenta los medios con que se opera. Así, por ejemplo, si con un teodolito que permite apreciar el segundo de arco se han medido los ángulos interiores de un triangulo plano y se han obtenido valores cuya suma es $179^{\circ} 59' 05''$ en lugar de 180° , como debería resultar de una medición ideal, se deduce que se ha cometido un error grosero. El cuidado con que el observador procede contribuye a disminuir la frecuencia de estos errores contra lo cual es necesario precaverse mediante oportunas operaciones de control. Los errores groseros se denominan también equivocaciones.
- b) Errores sistemáticos: estos errores afectan a toda una serie de mediciones según una misma ley y la influencia de ellos varía con las condiciones en que se hacen las diversas observaciones. Estos errores provienen de la imperfección de las teorías físicas que sirven de fundamento a las experiencias, de los instrumentos empleados y de ciertas particularidades del observador.
- La teoría de la refracción atmosférica, por ejemplo, solo prevé condiciones medias de la atmósfera a lo largo del camino de luz, y a veces el rayo luminoso atraviesa una zona donde la densidad del aire sufre una fuerte discontinuidad que ocasiona una refracción anómala. Todas las observaciones efectuadas en tales condiciones resultan afectadas de un error sistemático de esta naturaleza. Cuando se investiga los errores propios de un instrumento para tener en cuenta su influencia en la reducción de las observaciones, sucede a menudo que la determinación no es hecha con absoluta exactitud y quedan pequeños errores residuales que en forma sistemática hacen sentir su influencia en las mediciones. En una serie de mediciones efectuadas de la misma manera, dichos errores las afectan siempre con el mismo signo. Se pueden minimizar antes, durante o después de efectuada la medición:
- Antes de la medición se debe ajustar o calibrar cuidadosamente el instrumento, por ejemplo errores de verticalidad, inclinación y colimación pueden corregirse con los tornillos calantes y propios del instrumento. Durante la medición, utilizando métodos tales que al promediar las lecturas se eliminen los errores al actuar estos con signos opuestos (caso de los errores remanentes de inclinación y colimación que se eliminan con las lecturas conjugadas, y el error de trazo del

círculo que se elimina leyendo en dos o más sectores). Después de la medición, determinando el valor del error sistemático y luego haciendo la corrección correspondiente (por ejemplo, es el caso del error de índice en la medición de ángulos verticales con teodolitos que tienen nivel testigo). Análogo es el caso de distancias medidas con cintas de acero contrastadas.

- c) Errores accidentales: Depuradas las observaciones de errores groseros (equivocaciones) y sistemáticos, quedan aún afectadas de errores inevitables que derivan principalmente de las imperfecciones de nuestros sentidos y de las perturbaciones irregulares del medio ambiente en que se efectúan las observaciones y que hacen que estos errores llamados accidentales o casuales, ocurran con igual frecuencia positivos y negativos variando en forma continua su valor absoluto entre cero y un límite fácil de establecer en cada serie de observaciones y que es característico de la precisión de las observaciones. Como se puede ver, los errores accidentales pueden considerarse variables aleatorias continuas y deben ser tratados con las herramientas que proveen la probabilidad y la estadística.

Analogía con el tiro al blanco

El tiro al blanco se presta ventajosamente para analizar las distintas clases de errores, siempre que se asimilen a errores de observación las desviaciones de los impactos respecto del centro del blanco, figura 1.

Observando un blanco circular sobre el que un tirador haya hecho un número grande de disparos y donde imaginemos trazados dos ejes ortogonales con origen en el centro del blanco, podremos anotar los siguientes hechos:

- 1.- La zona de mayor densidad de impactos no coincide, en general, con el centro del blanco.
- 2.- La cantidad de impactos disminuye radialmente a partir de un determinado punto que es el centro de simetría de la distribución de impactos.
- 3.- El número total de impactos es inferior al número de disparos efectuados.

El hecho 1, se debe a las siguientes causas:

- i) un defecto visual del tirador
- ii) una imperfección del arma (sistema de puntería)
- iii) una perturbación ambiental (acción del viento, por ejemplo)

El hecho 1 puede asimilarse a los errores sistemáticos.

En el hecho 2, se observa que una vez descontados los disparos que no dieron en el blanco y eliminadas las causas de que el centro de simetría no coincida con el centro del blanco, uno cualquiera de ellos (impactos) a la derecha del centro se corresponde con otro a igual distancia a la izquierda; a medida que nos alejamos del centro, disminuye la cantidad (densidad) de impactos. El hecho 2 puede asimilarse a los errores accidentales puesto que:

- i) los impactos a la derecha (del centro) son tan frecuentes como los disparos a la izquierda.
- ii) Las distancias pequeñas (desde el centro) son más frecuentes que las grandes.

El hecho 3 se debe a las siguientes causas:

- i) inexperiencia del tirador.
- ii) descuido o falta de concentración del tirador.

En la siguiente figura se resumen los hechos 1, 2 y 3

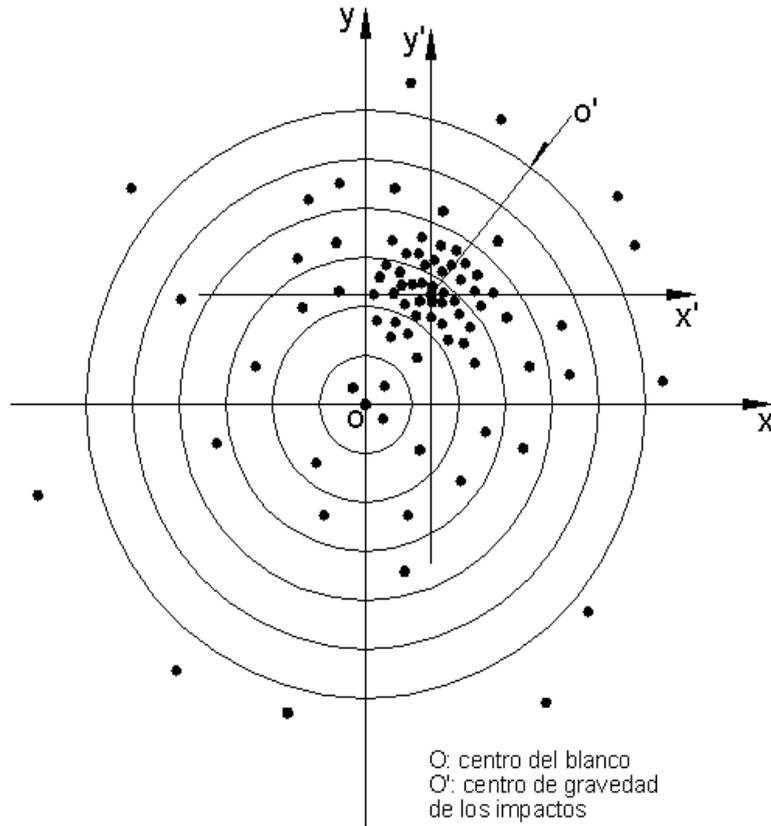


figura 1

En la siguiente figura se representa la función de densidad de los disparos: $\delta = f(x, y)$:

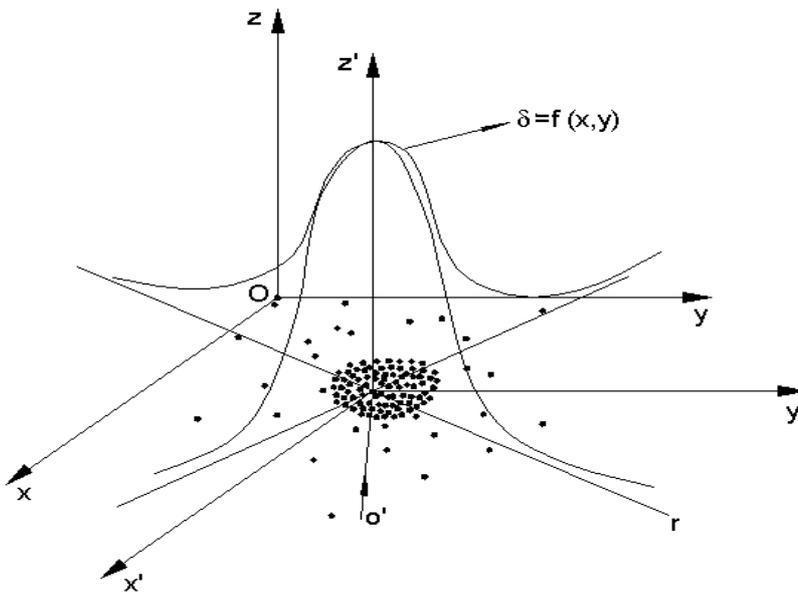


figura 2

Consideremos ahora una dirección arbitraria r en el plano x - y y cortemos la superficie $\delta = f(x, y)$ con un plano perpendicular al plano x - y :

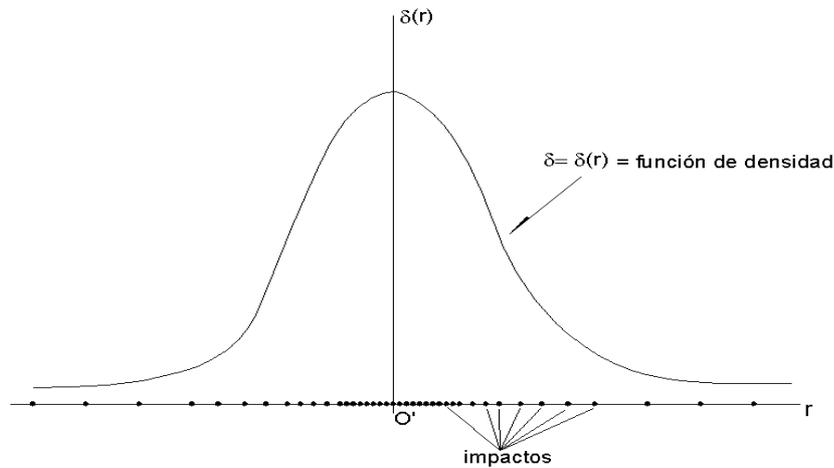


figura 3

La figura 3 muestra la distribución de los desvíos de los impactos respecto del centro de gravedad O' y la función $\delta = f(r)$ es la función de frecuencia o densidad de probabilidad puesto que los desvíos son de naturaleza estocástica.

Sea ahora una serie numerosa de observaciones de una magnitud X ; es decir:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

donde x_i $i = 1, n$ son las observaciones repetidas de la magnitud X . Llamemos X al verdadero valor de dicha magnitud. Nunca llegaremos a conocer el verdadero valor, solo podemos estimarlo mediante la media aritmética \bar{X} :

$$\bar{X} = \frac{[x]}{n} \quad (1)$$

donde $[x]$ es la notación de Gauss y significa la suma de las observaciones x_i para $i = 1, n$.

Supongamos a las observaciones libres de errores groseros y sistemáticos; es decir afectadas solamente por los errores accidentales.

Se define:

error aparente e_i : $e_i = x_i - \bar{X}$; $i = 1, n$

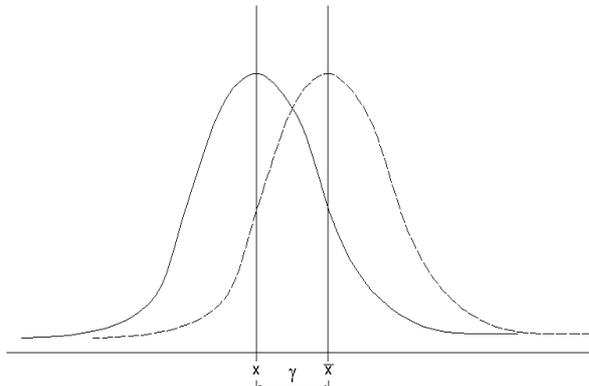
corrección aparente v_i : $v_i = \bar{X} - x_i$; $i = 1, n$

entonces: $v_i = -e_i$; $i = 1, n$

error verdadero ϵ_i : $\epsilon_i = x_i - X$; $i = 1, n$

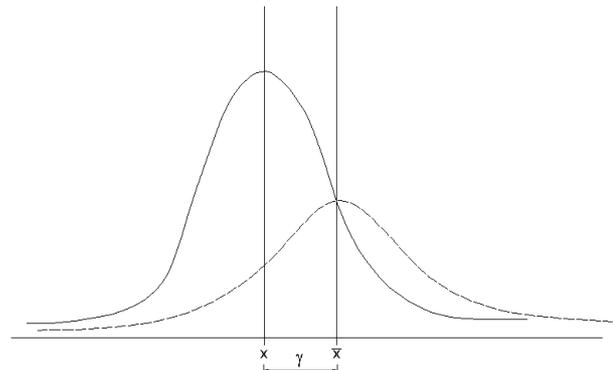
corrección verdadera γ_i : $\gamma_i = X - x_i$; $i = 1, n$

entonces: $\gamma_i = -\epsilon_i$; $i = 1, n$



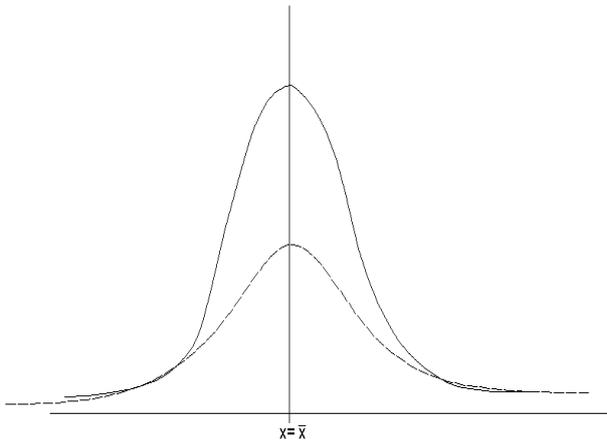
medición precisa pero no exacta

figura 5a



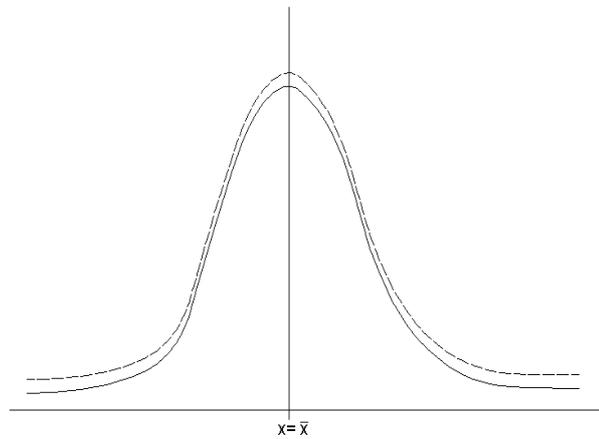
medición no precisa y no exacta

figura 5b



medición exacta pero no precisa

figura 5c



medición exacta y precisa

figura 5d

Más adelante, cuando tengamos la ecuación de la función de densidad de probabilidad o frecuencia de los errores de observación, definiremos matemáticamente la medida de la precisión.

Propiedades de la Media Aritmética

Primera Propiedad: “La suma de los errores aparentes es igual a cero: $[e] = 0$ ”

De la definición de la media aritmética (1):

$$\begin{aligned}
 n\bar{X} &= [x] = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\
 x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\bar{X} &= 0 \\
 x_1 + x_2 + \dots + x_n - (\bar{X} + \bar{X} + \dots + \bar{X}) &= 0 \\
 (x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_n - \bar{X}) &= 0
 \end{aligned}$$

pero $x_i - \bar{X} = e_i$, entonces: $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0 \rightarrow [e] = 0$ c.q.d.

Segunda Propiedad: “La suma de los cuadrados de los errores aparentes es mínima: $[e^2] = \text{mín.}$ ”

Sea \bar{X} la media aritmética y χ un estimador cualquiera del verdadero valor X de una magnitud dada, tal que $\chi \neq \bar{X}$. Llamemos ω_i al desvío de una observación x_i respecto de χ :

$$\begin{aligned} e_i &= x_i - \bar{X} \rightarrow x_i = e_i + \bar{X} \\ \omega_i &= x_i - \chi \rightarrow x_i = \omega_i + \chi \rightarrow \omega_i + \chi = e_i + \bar{X} \end{aligned}$$

entonces: $\omega_i = e_i + (\bar{X} - \chi)$

elevando al cuadrado ambos miembros: $(\omega_i)^2 = (e_i + (\bar{X} - \chi))^2$

desarrollando: $\omega_i^2 = e_i^2 + 2(\bar{X} - \chi)e_i + (\bar{X} - \chi)^2$

sumando m.a.m.: $[\omega_i^2] = [e_i^2] + 2(\bar{X} - \chi)[e_i] + [(\bar{X} - \chi)^2]$

por la primera propiedad de la media aritmética: $[e] = 0$, entonces:

$$[\omega_i^2] = [e_i^2] + n(\bar{X} - \chi)^2$$

puesto que $(\bar{X} - \chi)^2 > 0 \rightarrow [\omega_i^2] > [e_i^2] \rightarrow [e_i^2] < [\omega_i^2]$; es decir que cualquiera sea el estimador seleccionado se cumplirá siempre $[e_i^2] < [\omega_i^2]$. Se tiene entonces la segunda propiedad de la media aritmética: $[e_i^2] = \text{mínimo}$.

La media aritmética a partir de los “cuadrados mínimos”.

Partiendo de la media aritmética, la segunda propiedad establece que la suma de los cuadrados de los errores aparentes es mínima. Partiendo ahora de los “cuadrados mínimos”, deduciremos la expresión de la media aritmética.

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una serie de observaciones repetidas, libres de errores groseros y sistemáticos, de una magnitud cuyo verdadero valor es X . Sea χ un estimador desconocido de X . Denotaremos con ω_i el desvío o error de x_i respecto de χ .

$$\begin{aligned} \omega_i &= x_i - \chi \\ \omega_i^2 &= (x_i - \chi)^2 \end{aligned}$$

Sumando m.a.m.: $[\omega_i^2] = [(x_i - \chi)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \chi)^2 = f(\chi) = \text{mínimo}$

La condición necesaria de mínimo es que se anule la derivada primera: $f'(\chi) = 0$

$$f'(\chi) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \chi) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \chi) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \chi = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\chi$$

$$\chi = \frac{[x]}{n} = \bar{X}$$

La derivada segunda es: $f''(\chi) = 2n > 0$, entonces para $\chi = \frac{[x]}{n}$ existe mínimo de la función $f(\chi)$. La condición de “mínimos cuadrados” conduce entonces a la media aritmética.

Dedución de la curva de Gauss

La función φ es la función de frecuencia o densidad de probabilidad de los errores y es la ecuación de la curva de Gauss. Se deduce a partir de:

Los postulados de Gauss:

- 1.- La media aritmética es el valor más probable.
- 2.- Son igualmente probables (frecuentes) errores positivos y errores negativos:
 $\varphi(e_i) = \varphi(-e_i)$. La función de frecuencia o densidad de probabilidad φ , es simétrica.
- 3.- Los errores pequeños son mas probables (frecuentes) que los errores grandes; es decir, la función φ es decreciente respecto de la magnitud (valor absoluto) de los errores.
- 4.- Siempre, el error está comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$.

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una serie muy numerosa ($n \rightarrow \infty$) de observaciones repetidas de una dada magnitud. El valor más probable es la media aritmética (postulado 1).

La probabilidad a-priori de que se presente el conjunto o sistema de errores aparentes $e_i = x_i - \bar{X}$; $i = 1, n$ es la probabilidad conjunta:

$$p = p(e_1, e_2, \dots, e_n) = \varphi(e_1) de_1 \varphi(e_2) de_2 \dots \varphi(e_n) de_n \quad (3)$$

considerando a los e_i independientes.

Puesto que el valor de la media aritmética es el más probable, el sistema de los errores aparentes $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ debe ser el más probable; es decir, $p(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{máximo}$.

De (3): $\varphi(e_1) de_1 \varphi(e_2) de_2 \dots \varphi(e_n) de_n = \text{máximo}$

Puesto que $de_1 = de_2 = \dots = de_n$:

$$\varphi(e_1) \varphi(e_2) \dots \varphi(e_n) = \text{máximo} \quad (4)$$

Tomando logaritmo natural en ambos miembros de (4):

$$\ln \varphi(e_1) + \ln \varphi(e_2) + \dots + \ln \varphi(e_n) = \text{Cte}$$

Derivando respecto de e_i :

$$\frac{d \ln \varphi(e_1)}{de_1} + \frac{d \ln \varphi(e_2)}{de_2} + \dots + \frac{d \ln \varphi(e_n)}{de_n} = 0 \quad (5)$$

Multiplicando y dividiendo cada término del primer miembro de (5) por e_i :

$$\frac{d \ln \varphi(e_1)}{e_1 de_1} e_1 + \frac{d \ln \varphi(e_2)}{e_2 de_2} e_2 + \dots + \frac{d \ln \varphi(e_n)}{e_n de_n} e_n = 0 \quad (6)$$

Teniendo en cuenta la primera propiedad de la media aritmética:

$$[e] = e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0 \quad (7)$$

Para el cumplimiento simultáneo de (6) y (7) deberá, necesariamente ocurrir que:

$$\frac{d \ln \varphi(e)}{e de} = K \neq 0 \quad (8)$$

Es decir; $Ke_1 + Ke_2 + \dots + Ke_n = K(e_1 + e_2 + \dots + e_n) = K[e] = 0$

De la (8):

$$d(\ln \varphi(e)) = K e de \quad (9)$$

A fin de evitar confusiones en la notación, llamaremos de ahora en más x (minúscula manuscrita) a los errores aparentes; es decir $x = e$. Expresamos (9) de la siguiente manera:

$$d \ln \varphi(x) = K x dx$$

Integrando ambos miembros:

$$\int d \ln \varphi(x) dx = K \int x dx \rightarrow \ln \varphi(x) = K \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Hacemos } C = \ln C_1 \rightarrow \ln \varphi(x) = K \frac{x^2}{2} + \ln C_1 \rightarrow \ln \varphi(x) - \ln C_1 = K \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Es decir: } \ln \frac{\varphi(x)}{C_1} = K \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{\varphi(x)}{C_1} = e^{\frac{K}{2} x^2} \rightarrow \varphi(x) = C_1 e^{\frac{K}{2} x^2}$$

Por el postulado 3, $\frac{K}{2} < 0$. Haciendo $\frac{K}{2} = -h^2$ donde h es el módulo de precisión de Gauss:

$$\varphi(x) = C_1 e^{-h^2 x^2} \quad (10)$$

Según el postulado 4:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = p(-\infty \leq x \leq +\infty) = 1$$

entonces:

$$C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 1$$

Haciendo el cambio de variable: $t = hx \rightarrow dt = h dx$, entonces:

$$\frac{C_1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

Hallaremos el valor de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Puesto que la curva de frecuencia o densidad de probabilidad (10) es simétrica respecto del eje vertical (postulado 2), resulta evidente que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

El método para hallar ésta integral se debe a Sturm:
Consideremos el sistema de coordenadas trirectangulares (O, T, U, V) y la curva $v = e^{-t^2}$ rotando alrededor del eje V, figura 6.

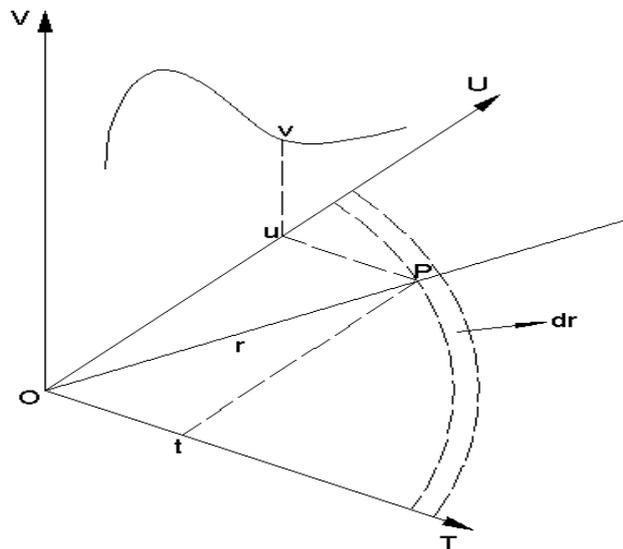


figura 6

En el plano VOT, el área comprendida por la curva $v = e^{-t^2}$ y el eje OT, es:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Análogamente, el área comprendida por la curva $v = e^{-t^2}$ y el eje OU, es:

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

Entonces:

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+u^2)} dt du$$

Para cualquier punto P en el plano UOT, se tiene: $OP^2 = r^2 = t^2 + u^2$

Entonces la ecuación de la superficie de revolución de la curva alrededor del eje V, es:

$$v = e^{-(t^2+u^2)}$$

Luego A^2 es igual a un cuarto del volumen comprendido entre la superficie de revolución y el plano UOT. Si consideramos una serie de cilindros concéntricos de radio r, el volumen comprendido entre la superficie y el plano UOT, es en el primer octante:

$$VOLUMEN = \int_0^{+\infty} 2\pi r v dr = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr$$

Cambiando de variable: $p = -r^2 \rightarrow dp = -2r dr \rightarrow dr = -\frac{dp}{2r}$, entonces:

$$VOLUMEN = -2\pi \int_0^{+\infty} r e^p \frac{dp}{2r} = -\pi \int_0^{-\infty} e^p dp = -\pi \left| e^p \right|_0^{-\infty} = -\pi(e^{-\infty} - e^0) = \pi$$

El volumen total es, entonces:

$$VOLUMEN = 4A^2 = \pi \rightarrow A^2 = \frac{\pi}{4} \rightarrow A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ luego:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2A = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Se tiene entonces:

$$\frac{C_1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{C_1}{h} \sqrt{\pi} = 1 \rightarrow C_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

Finalmente la ecuación de la curva de frecuencia o densidad de probabilidad de los errores de observación (curva de Gauss), es:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (11)$$

donde h se denomina medida o módulo de precisión de Gauss.

Construcción de la curva de probabilidad

Derivando (11) respecto de x e igualando a cero:

$$y' = \varphi'(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (-2h^2 x) = -2 \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2 x^2} = 0$$

$\varphi'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ en $x = 0$ existe un punto estacionario.

La derivada segunda:

$$\varphi''(x) = -2 \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} (e^{-h^2 x^2} - 2h^2 x^2 e^{-h^2 x^2}) = -2 \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (1 - 2h^2 x^2)$$

en $x = 0$, $\varphi''(x) = -2 \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} < 0$ entonces en $x = 0$ existe un máximo.

Para hallar los puntos de inflexión, anulamos la derivada segunda:

$$\varphi''(x) = -2 \frac{h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (1 - 2h^2 x^2) = 0 \rightarrow (1 - 2h^2 x^2) = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2h^2}$$

Las abscisas de los puntos de inflexión, son:

$$x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad (12)$$

La curva de Gauss presenta el siguiente aspecto:

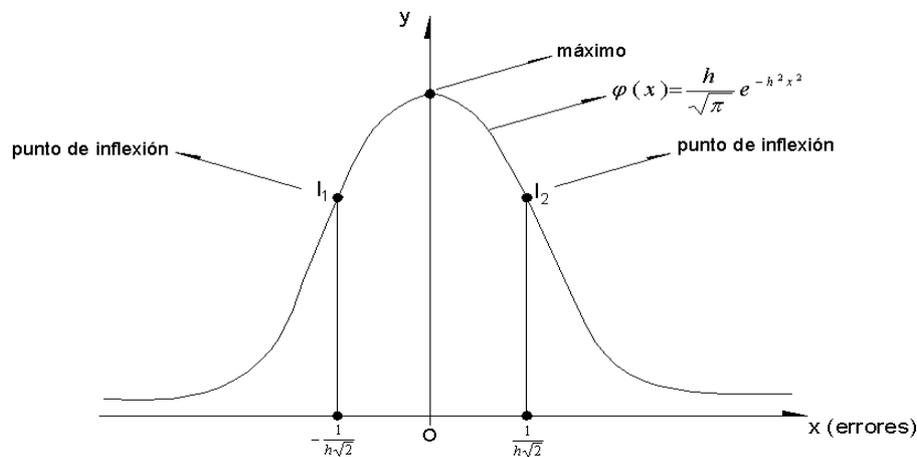


figura 7

Grafiquemos ahora dos curvas superpuestas para módulos de precisión iguales a 1 y 2, respectivamente:

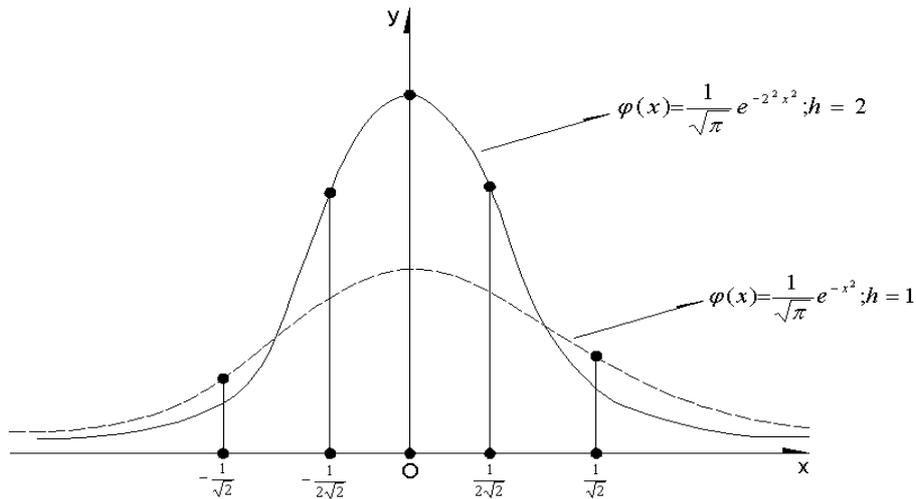


figura 8

Se ve claramente que cuanto mayor es el valor de h , mayor es la concentración de errores alrededor del valor más probable (error cero); es decir, mayor es la precisión, resultando así, más apuntada la curva de Gauss.

Media, varianza y desviación estándar de la variable aleatoria X .

La esperanza matemática o media de los errores de observación x es:

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-h^2 x^2} dx; \quad d(h^2 x^2) = 2h^2 x dx \rightarrow x dx = \frac{d(h^2 x^2)}{2h^2}$$

$$E(x) = \mu = \frac{h}{2h^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} d(h^2 x^2) = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \left| e^{-h^2 x^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \left| \frac{1}{e^{+\infty}} - \frac{1}{e^{+\infty}} \right| = 0$$

La media o esperanza de los errores de observación es igual a cero: $E(x) = \mu = 0$.

la varianza es:

$$Var(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx$$

cambio de variables: $t = hx \rightarrow dt = h dx \rightarrow dx = \frac{dt}{h}$

$$Var(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{h^2} e^{-t^2} \frac{dt}{h} = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt, \text{ pero } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ entonces la}$$

$$\text{varianza es: } Var(x) = \sigma^2 = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2h^2} \quad \rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{1}{2h^2}$$

La desviación estándar es: $\sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{2}h}$.

Nótese que $\pm \sigma$ son las abscisas de los puntos de inflexión en la curva de Gauss. Cuanto mayor es el modulo de precisión h , tanto menor es la desviación estándar σ . La calidad de una serie de observaciones repetidas de una magnitud dada, depende entonces del valor de σ . La desviación estándar, es pues, una medida de la precisión.

El error promedio o error medio aritmético: e_a

Definición:
$$e_a = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-h^2 x^2} dx \quad ; \quad x \geq 0$$

$d(h^2 x^2) = 2h^2 x dx \rightarrow x dx = \frac{d(h^2 x^2)}{2h^2}$, entonces:

$$e_a = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h^2 x^2} x dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \frac{d(h^2 x^2)}{2h^2} = \frac{2h}{2h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h^2 x^2} d(h^2 x^2)$$

$$e_a = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[-e^{-h^2 x^2} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{e^{+\infty}} - e^0 \right) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \rightarrow e_a = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Puesto que $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$, se tiene: $e_a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$

La relación entre el error medio aritmético y la desviación estándar, es:

$$e_a = 0.798 \sigma \quad \sigma = 1.253 e_a$$

Para un conjunto finito de observaciones (una muestra de tamaño n), el error medio aritmético es:

$$e_a = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{n}$$

El error probable: e_p

Es el error correspondiente al conjunto de observaciones de probabilidad $p = 0.5$ (50%); es decir:

$$\int_{-e_p}^{e_p} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{e_p} \varphi(x) dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{e_p} e^{-h^2 x^2} dx = 0.5$$

gráficamente se interpreta:

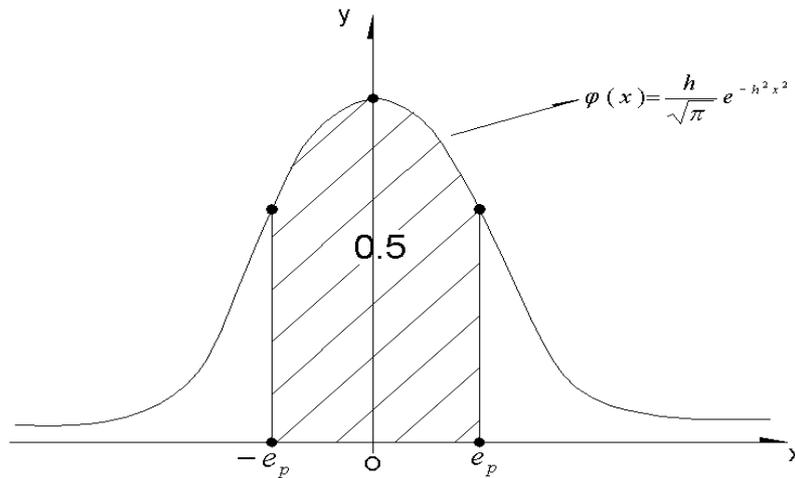


figura 9

Haciendo el cambio de variable: $z = h\sqrt{2}x \rightarrow dz = h\sqrt{2}dx \rightarrow dx = \frac{dz}{h\sqrt{2}}$

Los límites de integración cambian con el cambio de variable: $z = h\sqrt{2}x \rightarrow z = h\sqrt{2}e_p$
 $z = 0$, entonces:

$$0.5 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\sqrt{2}e_p} e^{-h^2 \frac{z^2}{2h^2}} \frac{dz}{h\sqrt{2}} = \frac{2h}{h\sqrt{2\pi}} \int_0^{h\sqrt{2}e_p} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{h\sqrt{2}e_p} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.25$$

De la tabla de áreas bajo la curva normal tipificada, se tiene que al valor del área igual a 0.25, le corresponde el valor de $z = 0.673$, entonces:

$$z = h\sqrt{2}e_p = 0.673 \rightarrow e_p = 0.673 \frac{1}{h\sqrt{2}} = 0.673\sigma$$

La relación entre el error probable e_p y la desviación estándar σ , es:

$$e_p = 0.673\sigma \quad \sigma = 1.486e_p$$

El error medio cuadrático o error estándar: e_{mc}

$$\text{definición: } e_{mc}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \sigma^2 = \frac{1}{2h^2}$$

entonces:

$$e_{mc} = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sigma$$

El error medio cuadrático es la desviación estándar.

El parámetro más usado actualmente para estimar la precisión de una serie de observaciones es el error medio cuadrático o desviación estándar, en forma prácticamente excluyente. Este parámetro representa el error de una observación en una

determinada serie de observaciones de una magnitud dada. También se lo conoce como el error estándar de una observación.

Determinaremos ahora el porcentaje de los errores que no superan al error estándar en una serie repetida de una dada magnitud. La probabilidad de que un error x esté comprendido entre $-\sigma$ y $+\sigma$, es:

$$p(-\sigma \leq x \leq +\sigma) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} \varphi(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{-h^2 x^2} dx$$

cambio de variable: $t = hx \rightarrow dt = h dx \rightarrow dx = \frac{dt}{h}$

los límites de integración: $t = hx \rightarrow t = h\sigma$; $t = -h\sigma \rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces:

$$p(-\sigma \leq x \leq +\sigma) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} \frac{dt}{h} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt$$

Desarrollando e^{-t^2} en serie de Mc Laurin:

$y = e^{-t^2}$	$y(0) = 1$
$y' = -2t e^{-t^2}$	$y'(0) = 0$
$y'' = -2 e^{-t^2} (1 - 2t^2)$	$y''(0) = -2$
$y''' = -2 e^{-t^2} (4t^3 - 6t)$	$y'''(0) = 0$
$y^{iv} = -2 e^{-t^2} (-8t^4 + 24t^2 - 6)$	$y^{iv}(0) = 12$
$y^v = -2 e^{-t^2} (16t^5 - 80t^3 + 60t)$	$y^v(0) = 0$
$y^{vi} = -2 e^{-t^2} (-32t^6 + 240t^4 - 360t^2 + 60)$	$y^{vi}(0) = -120$

.....

entonces:
$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \dots$$

Luego:

$$p(-\sigma \leq x \leq +\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \dots \right) dt$$

integrando la serie de potencias:

$$p(-\sigma \leq x \leq +\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + \dots \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.6823$$

es decir: $p(-\sigma \leq x \leq +\sigma) = p(|x| \leq \sigma) = 0.6823 = 68.23\%$

La probabilidad de que un error no supere en valor absoluto una desviación estándar, equivale aproximadamente al 68.23 %. Es decir que en una serie de 1000 observaciones, solamente 317 superarían a la media aritmética en valor absoluto en más de una desviación estándar, mientras que 683 no lo harían.

¿Que sucede con el error aritmético?

Cambiando los límites de integración en el desarrollo de Mc Laurin, se tiene:

$$p(|x| \leq e_a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + \dots \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}} = 0.5750$$

La probabilidad de que un error no supere en valor absoluto al error medio aritmético e_a equivale aproximadamente al 57.5%. Quiere decir que en una serie de 1000 errores, 425 superarían al error medio aritmético, mientras que 575 se mantendrían acotados por aquel. Esto significa que el error estándar es mas seguro que el error medio aritmético para estimar la precisión de las observaciones.

Calcularemos ahora la probabilidad de que un error no supere en valor absoluto a dos y tres veces la desviación estándar. Agregaremos más términos a la serie de Mc Laurin. Para ello usaremos el siguiente cuadro:

1	3	10	42	199	981	4888	24420	122077	610359
2	7	32	157	782	3907	19532	97657	488282	
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
5	5	5	5	5	5	5	5	5	

La primera fila son los denominadores de los términos de la serie; la segunda fila son las diferencias entre dos números consecutivos de la primera. La tercera fila son las diferencias entre dos números consecutivos de la segunda. La cuarta fila, todos iguales a 5, son los cocientes entre dos números consecutivos: siguiente dividido por anterior. Con estas reglas, puede extenderse la primera fila en forma indefinida.

Luego el desarrollo en serie de Mc Laurin es:

$$\int e^{-t^2} dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + \frac{t^9}{199} - \frac{t^{11}}{981} + \frac{t^{13}}{4888} - \frac{t^{15}}{24420} + \frac{t^{17}}{122077} - \frac{t^{19}}{610359} + \dots$$

entonces:

$$p(|x| \leq 2\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + \frac{t^9}{199} - \frac{t^{11}}{981} + \dots - \frac{t^{19}}{610359} + \dots \right]_0^{\sqrt{2}} = 0.9571 = 95.71\%$$

El valor que da la tabla de áreas bajo la curva normal tipificada es igual a 0.9544 (95.44 %). La diferencia se debe, tal vez, a que el número de términos de la serie es insuficiente.

De la tabla de áreas bajo la curva normal tipificada se obtiene:

$$p(|x| \leq 3\sigma) = 0.9974 = 99.74\%$$

Estos resultados pueden expresarse gráficamente:

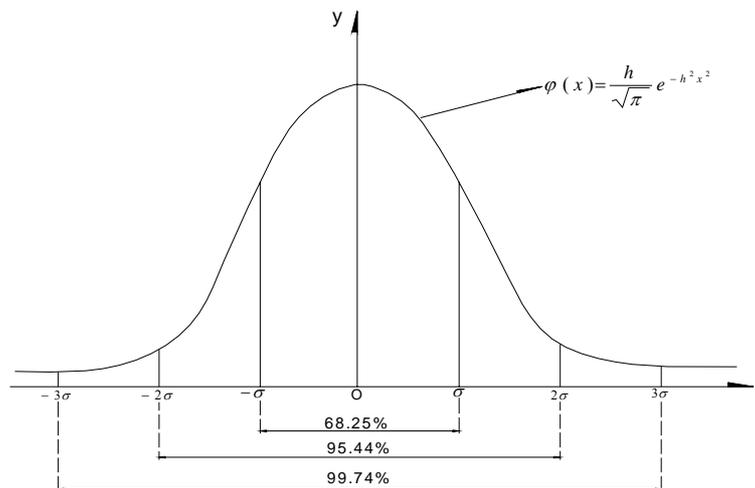


figura 10

Puesto que la probabilidad de que un error supere 3σ en valor absoluto es muy baja ($\cong 0.26\%$), podemos considerar como “errores groseros” aquellos cuyos valores absolutos superen 3σ .

El error máximo tolerable: e_t

Si en la tabla de áreas bajo la curva normal tipificada buscamos la abscisa z correspondientes a 0.99 (0.495 para las áreas tabuladas de 0 a z), se obtiene $z_t = 2.575$. Recordando que al error probable le corresponde el valor $z_p = 0.673$, resulta que:

$$\frac{z_t}{z_p} = \frac{2.575}{0.673} = 3.8262$$

Se adopta como tolerancia $z_t = 2.575$; es decir, el error cuya probabilidad de no ser superado es 0.99 (99 %).

De la relación anterior se concluye que:

$$\frac{e_t}{e_p} = 3.8262$$

entonces: $e_t = 3.8262 e_p$

pero: $e_p = 0.673 \sigma$

entonces: $e_i = 3.862 \cdot 0.673 \cdot \sigma = 2.6 \sigma$

Los errores mayores que e_i son altamente improbables (sólo el 1%) y si se detectan, deben ser eliminados de la medición.

Error medio cuadrático de la media aritmética:

Sea el caso en que se tiene un gran número de observaciones de una dada magnitud. Como es ya costumbre generalizada en las aplicaciones prácticas dar a los errores el sentido de las correcciones, en lo que sigue formaremos para el cálculo del error medio cuadrático de una observación, las diferencias:

$$v_i = \bar{X} - x_i \quad i = 1, n$$

donde \bar{X} es, como ya vimos, la media aritmética y x_i las observaciones de la magnitud en cuestión. La probabilidad de la corrección v de cualquiera de las observaciones es:

$$p(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} \quad (13)$$

La probabilidad del sistema de correcciones $v_i, i = 1, n$ es:

$$p(v_1, v_2, \dots, v_n) = p(v_1) p(v_2) \dots p(v_n) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_1^2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_2^2} \dots \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_n^2}$$

$$p(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)}$$

Empleando la notación de Gauss: $[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$, se tiene:

$$p(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 [vv]}$$

Puesto que el error medio cuadrático es la desviación estándar, se puede estimar la suma de los cuadrados de las correcciones por $n\sigma^2$; es decir:

$$[vv] = n\sigma^2$$

y así resulta:

$$p(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 n\sigma^2} = \frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h\sqrt{n})^2 \sigma^2} \quad (14)$$

Puesto que la probabilidad del sistema de correcciones $v_i, i = 1, n$ es equivalente a la probabilidad de la media aritmética \bar{X} , comparando las expresiones (13) y (14), se ve que (14) puede ser considerada como la probabilidad de una observación ficticia

promedio de n observaciones, cuyo módulo de precisión es $h\sqrt{n}$; mientras que el módulo de precisión de una observación es h . Es decir, que la precisión aumenta con la raíz cuadrada del número de observaciones. Habida cuenta que el error medio cuadrático de una observación es inversamente proporcional al módulo de precisión h , se tiene:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h}$$

Para la observación ficticia (la media aritmética \bar{X}), se tiene:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{nh})}$$

que es el error medio cuadrático de la media aritmética \bar{X} .
De las dos últimas expresiones:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\bar{X}}} = \sqrt{n}$$

entonces:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

Esta fórmula muestra que repitiendo las observaciones un número suficientemente grande de veces, se puede hacer el error medio cuadrático (error estándar) tan pequeño como se quiera. Esto es cierto si se supone que todos los errores son accidentales, pero la experiencia indica que en toda medición se presentan junto con estos, los errores sistemáticos, a veces tan pequeños que se ponen en evidencia después que los errores accidentales han sido reducidos luego de un gran número de repeticiones, y otras veces tan grandes que se manifiestan después de pocas observaciones. En general, la repetición de observaciones reduce el error del resultado (el error de la media aritmética) muy rápidamente al principio mientras que el efecto de los errores accidentales predomina sobre los sistemáticos. Es de suma importancia el hecho de que tarde o temprano se alcanza un punto en que la influencia de los errores accidentales es más pequeña que la de los errores sistemáticos. Más allá de este punto no hay ventajas en aumentar el número de observaciones. La siguiente figura muestra la disminución de $\sigma_{\bar{X}}$ con el aumento de n , sólo para los errores accidentales:

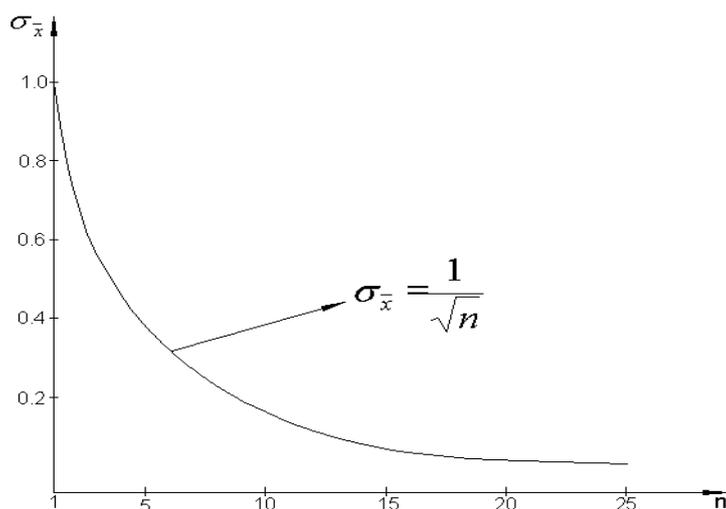


figura 11

Por razones de simplicidad se ha considerado $\sigma = 1$.

En la práctica, el error estándar σ de una observación se identifica con la precisión del instrumento (declarada por el fabricante), mientras que el error de la media aritmética es el error estándar del resultado de la medición. Por ejemplo, se desea saber cuantas veces debe medirse una dirección horizontal con un teodolito que garantiza un error estándar $\sigma = 6''$, cuando se quiere obtener un error estándar menor o igual que $3''$ en la determinación de dicha dirección horizontal. Entonces:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \sigma_x \rightarrow \frac{6''}{\sqrt{n}} \leq 3'' \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{6''} \geq \frac{1}{3''} \rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{6''}{3''} = 2 \rightarrow n \geq 4$$

El número de observaciones repetidas debe ser, al menos, igual a cuatro.

Estimaciones de σ y σ_x para una muestra de observaciones de tamaño n:

En la práctica se trabaja generalmente con un número reducido de observaciones; es decir, con una muestra de tamaño n pequeño ($n \leq 30$).

La media aritmética se aproxima al verdadero valor de la magnitud conforme aumenta el número de observaciones. Teóricamente, la media aritmética alcanza al verdadero valor en el límite cuando n tiende a infinito; es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} = X \equiv E(X) = \mu$$

En las aplicaciones prácticas n será tal que \bar{X} dista de X (verdadero valor) en una cantidad γ no despreciable; es decir:

$$\begin{aligned} \gamma &= X - \bar{X} \\ X &= \bar{X} + \gamma \end{aligned}$$

El verdadero error de una observación x_i es:

$$\varepsilon_i = x_i - X = x_i - (\bar{X} + \gamma)$$

$$\varepsilon_i = (x_i - \bar{X}) - \gamma$$

Pero $x_i - \bar{X} = e_i$: error aparente, entonces: $\varepsilon_i = e_i - \gamma$

Puesto que: $\varepsilon_i = -\gamma_i$ (corrección verdadera) y $e_i = -v_i$ (corrección aparente), se tiene:

$$-\gamma_i = -v_i - \gamma \rightarrow \gamma_i = v_i + \gamma$$

La desviación estándar puede expresarse por: $\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[\gamma\gamma]}{n}}$, luego:

$$n\sigma^2 = [\gamma\gamma] = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 \quad (16)$$

Pero $\gamma_i = v_i + \gamma$ para $i = 1, n$, reemplazando en (16):

$$n\sigma^2 = (v_1 + \gamma)^2 + (v_2 + \gamma)^2 + \dots + (v_n + \gamma)^2$$

Desarrollando los cuadrados de los binomios en el segundo miembro y agrupando:

$$n\sigma^2 = [vv] + 2\gamma[v] + n\gamma^2$$

De la primera propiedad de la media aritmética: $[v] = 0$, entonces:

$$n\sigma^2 = [vv] + n\gamma^2 \quad (17)$$

Puesto que no conocemos el valor de γ , lo estimamos con el error estándar de la media aritmética: $\gamma \cong \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Reemplazando en (17) y considerando $\hat{\sigma}$ como el estimador muestral de la desviación estándar poblacional σ :

$$n\hat{\sigma}^2 = [vv] + n\frac{\hat{\sigma}^2}{n} = [vv] + \hat{\sigma}^2 \rightarrow n\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2 = [vv] \rightarrow \hat{\sigma}^2(n-1) = [vv], \text{ entonces:}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[vv]}{n-1} \quad (18)$$

El estimador de la desviación estándar poblacional (error estándar), es:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad (19)$$

Entonces, el estimador del error estándar de la media aritmética es:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad (20)$$

Ejemplo: Se han efectuado diez observaciones de una distancia:

- i) Aplicar el criterio de Chauvenet para sanear la muestra
- ii) Hallar la media aritmética, el error estándar de una observación y el error estándar de la media aritmética para la muestra saneada.
- iii) Hallar un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional.
- iv) Hallar un intervalo de confianza del 95% para la varianza y para la desviación estándar.

La muestra original:

registro	observación $x_i(m)$
1	330.271
2	330.275
3	330.269
4	330.272
5	330.274
6	330.270
7	330.261
8	330.273
9	330.272
10	330.268

- i) El criterio de Chauvenet: Se conservan aquellas observaciones comprendidas entre un limite inferior L_I y un limite superior L_S , tales que:

$$p(L_I \leq x_i \leq L_S) = 1 - \frac{1}{2n}$$

donde n es el tamaño de la muestra y:

$$L_I = \bar{X} - z_c \hat{\sigma} \quad L_S = \bar{X} + z_c \hat{\sigma}$$

z_c es el valor crítico obtenido de la tabla de áreas bajo la curva normal tipificada.

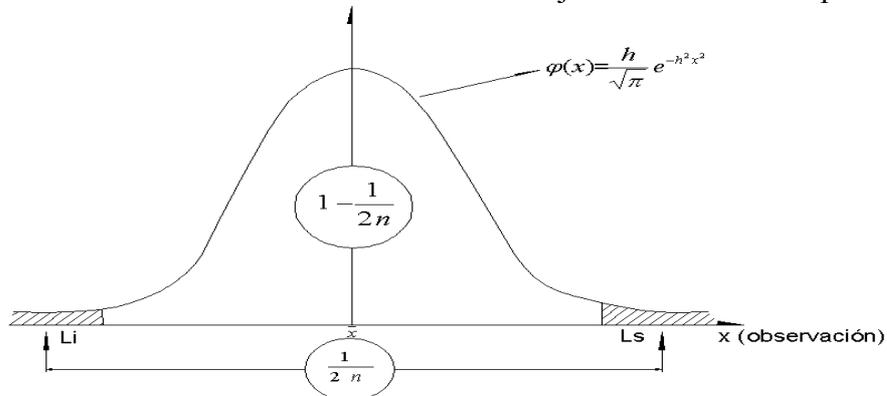


figura 12

$x_i(m)$	$v_i = \bar{X} - x_i$	v_i^2
330.271	-0.0005	$2.5 \cdot 10^{-7}$
330.275	-0.0045	$2.025 \cdot 10^{-5}$
330.269	0.0015	$2.25 \cdot 10^{-6}$
330.272	-0.0015	$2.25 \cdot 10^{-6}$
330.274	-0.0035	$1.225 \cdot 10^{-5}$
330.270	0.0005	$2.5 \cdot 10^{-7}$
330.261	0.0095	$9.025 \cdot 10^{-5}$
330.273	-0.0025	$6.25 \cdot 10^{-6}$
330.272	-0.0015	$2.25 \cdot 10^{-6}$
330.268	0.0025	$6.25 \cdot 10^{-6}$

$$\bar{X} = \frac{[x]}{n} = 330.2705 \text{ m} \quad [v] = 0 \quad [vv] = 1.42510^{-4} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{1.42510^{-4}}{10-1}} = 0.00398 \text{ m} \quad (\text{error estándar de una observación})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1.42510^{-4}}{10(10-1)}} = 0.00126 \text{ m} \quad (\text{error estándar de la media aritmética})$$

Aplicamos el criterio de Chauvenet para sanear la muestra:

$$p(L_l \leq x_i \leq L_s) = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0.95$$

De la tabla de áreas bajo la curva normal tipificada, se tiene $z_c = 1.96$, entonces:

$$L_l = \bar{X} - z_c \sigma = 330.2705 - 1.96 \cdot 0.00398 = 330.263 \text{ m}$$

$$L_s = \bar{X} + z_c \sigma = 330.2705 + 1.96 \cdot 0.00398 = 330.278 \text{ m}$$

Debe eliminarse la observación 7: $x_7 = 330.261 \text{ m}$, puesto que $x_7 < L_l$.

ii) La muestra saneada, sin la observación x_7 , tiene ahora tamaño $n = 9$.

$x_i(m)$	$v_i(m)$	$v_i^2(m^2)$
330.271	0.00056	$3.136 \cdot 10^{-7}$
330.275	-0.0034	$1.156 \cdot 10^{-5}$
330.269	0.0026	$6.76 \cdot 10^{-6}$
330.272	-0.00044	$1.936 \cdot 10^{-7}$
330.274	-0.0024	$5.76 \cdot 10^{-6}$
330.270	0.0016	$2.56 \cdot 10^{-6}$
330.273	-0.0014	$1.96 \cdot 10^{-6}$
330.272	-0.00044	$1.936 \cdot 10^{-7}$
330.268	0.0036	$1.296 \cdot 10^{-5}$

$$\bar{X} = 330.2716 \text{ m} \quad [v] = 0.00028 \text{ m} \quad [vv] = 4.2260810^{-5} \text{ m}^2$$

$$\sigma = 0.0023 \text{ m}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.00077 \text{ m}$$

Criterio de Chauvenet:

$$p(L_I \leq x_i \leq L_S) = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} = 0.94 \rightarrow z_c = 1.91$$

$$L_I = 330.267 \text{ m} \quad L_S = 330.276 \text{ m}$$

Se aceptan ahora las nueve observaciones y la muestra está saneada con media aritmética $\bar{X} = 330.2716 \text{ m}$, error estándar de una observación $\hat{\sigma} = 0.0023 \text{ m}$ y error estándar de la media aritmética $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 0.00077 \text{ m}$.

iii) Intervalo de confianza del 95% para la media.

grados de libertad (redundancia): $\nu = n - 1 = 9 - 1 = 8$

nivel de significación : $\alpha = 0.05$ (5%)

t crítico (tabla "t" de Student) : $t_c = t_{\nu, 1 - \frac{\alpha}{2}} = t_{8, 0.975} = 2.31$

$$L_I = \bar{X} - t_c \hat{\sigma} = 330.2716 - 2.31 \cdot 0.00077 = 330.270 \text{ m}$$

$$L_S = \bar{X} + z_c \hat{\sigma} = 330.2716 + 2.31 \cdot 0.00077 = 330.273 \text{ m}$$

La media poblacional pertenece al intervalo (330.270, 330.273) al 95% de confianza.

El error de la media aritmética al 95% de confianza es:

$$error_{\bar{X} 95\%} = \hat{\sigma}_{\bar{X} 95\%} = t_{\nu, 1 - \frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma} = 2.31 \cdot 0.00077 = 0.0018 \text{ m} \cong 1.8 \text{ mm}$$

¿Cuántas observaciones deberán efectuarse para que el error de la media aritmética sea menor que 0.0008 m al 95% de confianza?

$$z_c \hat{\sigma}_{\bar{X}} = z_c \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq 0.0008 \text{ m} \quad z_c = 1.96$$

$$1.96 \frac{0.0023}{\sqrt{n}} \leq 0.0008 \rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.96 \cdot 0.0023}{0.0008} \cong 5.64 \rightarrow n \geq 32$$

iv) Intervalos de confianza para la varianza y la desviación estándar:

Partimos de la expresión del estimador del error estándar de una observación:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[vv]}{n-1} \rightarrow [vv] = (n-1) \hat{\sigma}^2 \rightarrow \frac{[vv]}{\sigma^2} = (n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \chi^2$$

El estadístico muestral o estadístico de prueba χ^2 , distribuye chi-cuadrado con $\nu = n - 1$ grados de libertad, figura 13.

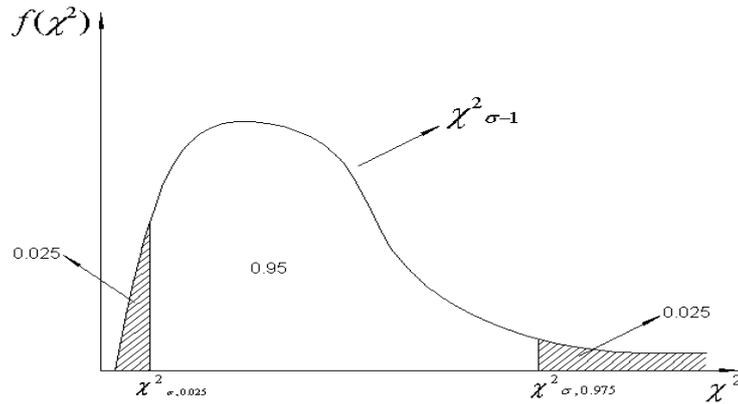


figura 13

Un intervalo de confianza del 95% para χ^2 , es:

$$\begin{aligned}
 \chi^2_{v,0.025} &< \chi^2 < \chi^2_{v,0.975} \\
 \chi^2_{v,0.025} &< (n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{v,0.975} \\
 \frac{1}{\chi^2_{v,0.025}} &> \frac{\sigma^2}{(n-1)\hat{\sigma}^2} > \frac{1}{\chi^2_{v,0.975}} \\
 \frac{1}{\chi^2_{v,0.975}} &< \frac{\sigma^2}{(n-1)\hat{\sigma}^2} < \frac{1}{\chi^2_{v,0.025}} \\
 \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{v,0.975}} &< \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{v,0.025}}
 \end{aligned} \tag{21}$$

La (21) representa un intervalo de confianza del 95% para la varianza poblacional σ^2 .

En el ejemplo, se tiene:

$$n = 9 \rightarrow v = n - 1 = 9 - 1 = 8 ; \quad \hat{\sigma}^2 = 0.00000529$$

De la tabla chi-cuadrado: $\chi^2_{8,0.025} = 2.18$ y $\chi^2_{8,0.975} = 17.5$

De la (21):

$$\frac{8 \cdot 0.00000529}{17.5} < \sigma^2 < 2.18 \frac{8 \cdot 0.00000529}{2.18}$$

Intervalo de confianza del 95% para σ^2 : $0.00000242 < \sigma^2 < 0.0000194$

Intervalo de confianza del 95% para σ : $0.0016 < \sigma < 0.0044$

PARTE 2: PROPAGACION DE LOS ERRORES DE OBSERVACION

Propagación de la varianza-covarianza:

Sea una función no lineal U, de las variables estocásticas x, y, z:

$$U = f(x, y, z) \quad (22)$$

Sean $\mu_x = E(x)$; $\mu_y = E(y)$; $\mu_z = E(z)$ las esperanzas de x, y, z respectivamente; $\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2]$; $\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2]$; $\sigma_z^2 = E[(z - \mu_z)^2]$ las varianzas de x, y, z respectivamente y $\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$; $\sigma_{xz} = E[(x - \mu_x)(z - \mu_z)]$, $\sigma_{yz} = E[(y - \mu_y)(z - \mu_z)]$ las covarianzas de x y, x z, y z, respectivamente.

Desarrollando (22) en serie de Taylor alrededor de (μ_x, μ_y, μ_z) :

$$U = f(\mu_x, \mu_y, \mu_z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \mu_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \mu_y) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - \mu_z) + R$$

donde R contiene los términos no lineales. Conservando solo la parte lineal del desarrollo:

$$U = f(\mu_x, \mu_y, \mu_z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \mu_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \mu_y) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - \mu_z) \quad (23)$$

pero $\varepsilon_U = U - f(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$; $\varepsilon_x = x - \mu_x$; $\varepsilon_y = y - \mu_y$; $\varepsilon_z = z - \mu_z$ son los verdaderos errores de U, x, y, z respectivamente; entonces la (23) se expresa:

$$\varepsilon_U = \frac{\partial U}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial U}{\partial y} \varepsilon_y + \frac{\partial U}{\partial z} \varepsilon_z \quad (24)$$

$$\varepsilon_U^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \varepsilon_z^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \varepsilon_x \varepsilon_y + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \varepsilon_x \varepsilon_z + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} \varepsilon_y \varepsilon_z$$

entonces:

$$E[\varepsilon_U^2] = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 E[\varepsilon_x^2] + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 E[\varepsilon_y^2] + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 E[\varepsilon_z^2] + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} E[\varepsilon_x \varepsilon_y] + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} E[\varepsilon_x \varepsilon_z] + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} E[\varepsilon_y \varepsilon_z] \quad (25)$$

Teniendo en cuenta que:

$$E[\varepsilon_U^2] = E[(U - f(\mu_x, \mu_y, \mu_z))^2] = \sigma_U^2 \quad \rightarrow \text{varianza de U}$$

$$E[\varepsilon_x^2] = E[(x - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 \quad \rightarrow \text{varianza de x}$$

$$\begin{aligned}
E[\varepsilon_y^2] &= E[(x - \mu_y)^2] = \sigma_y^2 && \rightarrow \text{varianza de } y \\
E[\varepsilon_z^2] &= E[(x - \mu_z)^2] = \sigma_z^2 && \rightarrow \text{varianza de } z \\
E[\varepsilon_x \varepsilon_y] &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \sigma_{xy} && \rightarrow \text{covarianza de } x \text{ y } \\
E[\varepsilon_x \varepsilon_z] &= E[(x - \mu_x)(z - \mu_z)] = \sigma_{xz} && \rightarrow \text{covarianza de } x \text{ z } \\
E[\varepsilon_y \varepsilon_z] &= E[(y - \mu_y)(z - \mu_z)] = \sigma_{yz} && \rightarrow \text{covarianza de } y \text{ z }
\end{aligned}$$

La (25) puede expresarse ahora como:

$$\begin{aligned}
\sigma_U^2 &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \\
&\quad + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \sigma_{xy} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \sigma_{xz} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} \sigma_{yz}
\end{aligned} \tag{26}$$

Si x, y, z son variables aleatorias (estocásticas) independientes: $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, entonces:

$$\sigma_U^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 \tag{27}$$

La (26) es la ley general de la propagación de la varianza-covarianza, mientras que la (27) es la ley de propagación de la varianza, conocida también como la ley de Gauss de propagación de los errores de observación.

La (26) puede expresarse matricialmente:

$$\sigma_U^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = A \sum_{x,y,z} A^T \tag{28}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \sum_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

La matriz $\sum_{x,y,z}$ es la matriz varianza-covarianza de x, y, z .

Si x, y, z son estocasticamente independientes: $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, entonces:

$$\sigma_U^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 \quad (29)$$

se tiene la ley de Gauss de propagación de la varianza o propagación de los errores de observación, donde X, Y, Z, son las magnitudes observadas.

Ejemplo1: Se han efectuado seis observaciones de una distancia inclinada s y del ángulo vertical β , para determinar la correspondiente distancia reducida al horizonte. Hallar: a) la distancia reducida al horizonte y su correspondiente error estándar; b) el error del 95% de confianza; c) el máximo error tolerable; d) el error relativo en partes por millón (ppm).

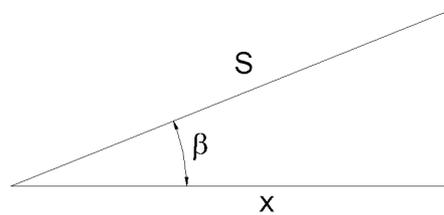


figura 14

a) distancias inclinadas observadas:

nº	s_i (m)	v_i (m) = $\bar{s} - s_i$	v_i^2 (m ²)
1	125.32	0.002	0.000004
2	125.35	-0.028	0.000784
3	125.29	0.032	0.001024
4	125.30	0.022	0.000484
5	125.33	-0.008	0.000064
6	125.34	-0.018	0.000324

$$\bar{s} = \frac{[x]}{n} = 125.322 \text{ m}; [v] = 0.002 \text{ m} \cong 0; [vv] = 0.002684 \text{ m}^2$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = 0.0232 \text{ m}; \hat{\sigma}_{\bar{s}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 0.0095 \text{ m}$$

Criterio de Chauvenet:

$$p(L_l \leq s \leq L_s) = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0.92 \rightarrow z_c = 1.73$$

$$L_l = 125.322 \text{ m} - 1.73 \cdot 0.0232 \text{ m} = 125.282 \text{ m}$$

$$L_s = 125.322 \text{ m} + 1.73 \cdot 0.0232 \text{ m} = 125.362 \text{ m}$$

No se rechazan observaciones de distancias inclinadas.

ángulos verticales:

n°	β_i	$v_i = \bar{\beta} - \beta_i$	v_i^2
1	25°15'10"	10.8"	116.64"
2	5	15.8	249.64
3	20	0.8	0.64
4	15	5.8	33.64
5	30	-9.2	84.64
6	45	-24.2	585.64

$$\bar{\beta} = 25^\circ 15' 08''; [v] = -0.2'' \cong 0; [vv] = 1070.84''^2$$

$$\sigma_\beta = 14.6''; \sigma_{\bar{\beta}} = 6.0''$$

Criterio de Chauvenet:

$$p(L_l \leq s \leq L_s) = 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0.92 \rightarrow z_c = 1.73$$

$L_l = -4.5''; L_s = 45.1'' \rightarrow$ no se rechazan observaciones de ángulos verticales.

La distancia reducida al horizonte es:

$$X = U(s, \beta) = s \cos \beta$$

El mejor estimador de X se obtiene reemplazando en la expresión anterior, los mejores estimadores de s y β ; es decir \bar{s} y $\bar{\beta}$ respectivamente; entonces:

$$\bar{X} = \bar{s} \cos \bar{\beta} = 125.32m \cos(25^\circ 15' 20.8'') = 113.343m$$

Covarianza de s, β : $\sigma_{s\beta}$:

n°	$v_s = (\bar{s} - s_i)m$	$v_\beta = (\bar{\beta} - \beta_i)^{rad}$	$(v_s v_\beta)m$
1	0.002	0.0000524	0.0000001048
2	-0.028	0.0000766	-0.0000021450
3	0.032	0.00000388	0.0000001242
4	0.022	0.0000281	0.0000006182
5	-0.008	-0.0000446	0.0000003568
6	-0.018	-0.000173	0.0000031140

$$[v_s v_\beta] = 0.000002068m$$

estimación de la covarianza : $\hat{\sigma}_{s\beta} = \frac{[v_s v_\beta]}{n-1} = \frac{0.000002068}{6-1} = 4.13610^{-7} m$

El error estándar de X, $X = U(s, \beta) = s \cos \beta$:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} & \frac{\partial U}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s\beta} \\ \sigma_{\beta s} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial s} \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \cos \beta = \cos(25^\circ 15' 20.8'') = 0.9044$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = -s \operatorname{sen} \beta = -125.322 \operatorname{sen}(25^\circ 15' 20.8'') = -53.470 \text{ m}$$

$$\sigma_{s\beta} = \sigma_{\beta s} = 4.136 \cdot 10^{-7} \text{ m}; \sigma_s^2 = 0.0005382 \text{ m}^2; \sigma_\beta^2 = 5.0102 \cdot 10^{-9}$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \begin{bmatrix} 0.9044 & -53.4700 \text{ m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0005382 \text{ m}^2 & 4.13610^{-7} \text{ m} \\ 4.13610^{-7} \text{ m} & 5.010210^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9044 \\ -53.700 \text{ m} \end{bmatrix} = 4.145510^{-4} \text{ m}^2$$

entonces, el error estándar de X, es:

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{4.145510^{-4} \text{ m}^2} = 0.020 \text{ m}$$

y el error estándar del mejor estimador de X (\bar{X}), es:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} = \frac{0.020 \text{ m}}{\sqrt{6}} = 0.0082 \text{ m}$$

Dado que la covarianza $\sigma_{s\beta} = 4.13610^{-7} \text{ m}$ es muy pequeña ($\sigma_{s\beta} \cong 0$), las variables estocásticas s, β , pueden considerarse independientes (o no correlacionadas). En ese caso, se aplica la ley de Gauss de la propagación de los errores de observación:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)^2 \hat{\sigma}_s^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)^2 \hat{\sigma}_\beta^2 = (0.9044)^2 (0.0232)^2 \text{ m}^2 + (-53.4700 \text{ m})^2 \left(\frac{14.6''}{206265} \right)^2$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = 4.545710^{-4} \text{ m}^2 \rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{X}} = 0.021 \text{ m}$$

En la práctica, cuando las observaciones son independientes, la propagación de los errores de observación se resuelve directamente con la ley de Gauss. Este es el caso más frecuente en los levantamientos topográficos.

b) El error del 95% de confianza:

$$\text{error}_{95\%} = z_c \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{0.020 \text{ m}}{\sqrt{6}} = 0.016 \text{ m}$$

c) El error máximo tolerable: $e_t = 2.6 \hat{\sigma}_X = 2.6 \cdot 0.020 \text{ m} = 0.052 \text{ m}$

d) El error relativo: $\varepsilon_r = \frac{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}{\bar{X}} = \frac{0.0082 \text{ m}}{113.343 \text{ m}} = 7.2310^{-5} = 72.310^{-6} = 72.3 \text{ ppm}$

Es decir 72.3 mm en un kilómetro (o 7.23 cm en un kilómetro).

Ejemplo 2: Sea la siguiente radiación de ángulos, donde se han observado las siguientes direcciones horizontales:

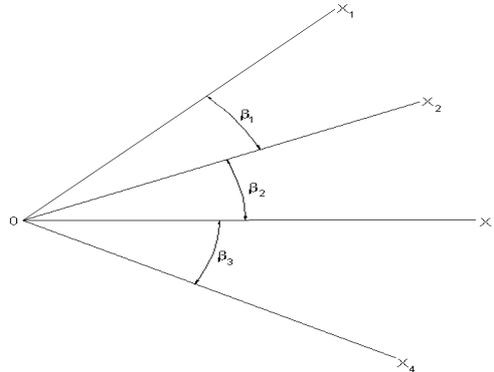


figura 15

$x_1 = 45^\circ 38' 20''$; $x_2 = 61^\circ 30' 27''$; $x_3 = 83^\circ 07' 39''$; $x_4 = 110^\circ 41' 15''$, todas con el mismo error estándar: $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \sigma_{x_4} = \pm 5''$. Hallar: a) los ángulos horizontales $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. b) los errores estándar de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. c) las covarianzas $\sigma_{\beta_1\beta_2}, \sigma_{\beta_1\beta_3}, \sigma_{\beta_2\beta_3}$. d) los coeficientes de correlación r_{12}, r_{13}, r_{23} .

Las observaciones (direcciones horizontales) son independientes; es decir;

$$\sigma_{x_1x_2} = \sigma_{x_1x_3} = \sigma_{x_1x_4} = \sigma_{x_2x_3} = \sigma_{x_2x_4} = \sigma_{x_3x_4} = 0$$

a) ángulos.

$$\beta_1 = x_2 - x_1 = 15^\circ 27' 07''; \beta_2 = x_3 - x_2 = 21^\circ 37' 12''; \beta_3 = x_4 - x_3 = 27^\circ 33' 36''$$

b) Covarianzas de los ángulos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -x_1 + x_2 \\ \beta_2 &= -x_2 + x_3 \\ \beta_3 &= -x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Expresando en forma matricial: $\beta = A X \rightarrow \sum_{\beta} = A \sum_X A^T$

$$\beta = A X = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow \sum_{\beta} = A \sum_X A^T$$

$$\sum_{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1\beta_2} & \sigma_{\beta_1\beta_3} \\ \sigma_{\beta_1\beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 & \sigma_{\beta_2\beta_3} \\ \sigma_{\beta_1\beta_3} & \sigma_{\beta_2\beta_3} & \sigma_{\beta_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x_3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_4}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1\beta_2} & \sigma_{\beta_1\beta_3} \\ \sigma_{\beta_1\beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 & \sigma_{\beta_2\beta_3} \\ \sigma_{\beta_1\beta_3} & \sigma_{\beta_2\beta_3} & \sigma_{\beta_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 & -\sigma_{x_2}^2 & 0 \\ -\sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 & -\sigma_{x_3}^2 \\ 0 & -\sigma_{x_3}^2 & \sigma_{x_3}^2 + \sigma_{x_4}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 \\ -25 & 50 & -25 \\ 0 & -25 & 50 \end{bmatrix}$$

Varianzas	desviaciones estándar	covarianzas
$\sigma_{\beta_1}^2 = 50''^2$	$\sigma_{\beta_1} = 7.07''$	$\sigma_{\beta_1\beta_2} = -25''^2$
$\sigma_{\beta_2}^2 = 50''^2$	$\sigma_{\beta_2} = 7.07''$	$\sigma_{\beta_1\beta_3} = 0$
$\sigma_{\beta_3}^2 = 50''^2$	$\sigma_{\beta_3} = 7.07''$	$\sigma_{\beta_2\beta_3} = -25''^2$

c) Coeficientes de correlación: $r_{\beta_i\beta_j} = \frac{\sigma_{\beta_i\beta_j}}{\sigma_{\beta_i} \sigma_{\beta_j}}$

$$r_{\beta_1\beta_2} = \frac{\sigma_{\beta_1\beta_2}}{\sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_2}} = \frac{-25}{7.07 \cdot 7.07} = \frac{-25}{50} = -0.5$$

$$r_{\beta_1\beta_3} = \frac{\sigma_{\beta_1\beta_3}}{\sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_3}} = \frac{0}{7.07 \cdot 7.07} = 0$$

$$r_{\beta_2\beta_3} = \frac{\sigma_{\beta_2\beta_3}}{\sigma_{\beta_2} \sigma_{\beta_3}} = \frac{-25}{7.07 \cdot 7.07} = \frac{-25}{50} = -0.5$$

coef. de correlación	correlación
$ r =0$	nula
$0 \leq r \leq 0.30$	débil
$0.30 \leq r \leq 0.75$	media
$0.75 \leq r \leq 0.99$	fuerte
$ r =1$	perfecta

Los ángulos β_1 y β_2 están correlacionados (correlación media). Los ángulos β_1 y β_3 no están correlacionados (correlación nula). Los ángulos β_2 y β_3 están correlacionados (correlación media).

Sea $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2$, hallar el error estándar σ_{γ_1} :

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{\gamma_1}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1\beta_2} \\ \sigma_{\beta_2\beta_1} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_2}^2 + 2 \sigma_{\beta_1\beta_2}$$

$$\sigma_{\gamma_1}^2 = 50''^2 + 50''^2 - 2 \cdot 25''^2 = 50''^2 \Rightarrow \sigma_{\gamma_1} = \sqrt{50''^2} = 7.07''$$

Si consideramos que: $\gamma_1 = x_3 - x_2$, entonces:

$$\gamma_1 = -x_1 + x_3 = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\gamma_1}^2 = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_3} \\ \sigma_{x_3 x_1} & \sigma_{x_3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

pero $\sigma_{x_1 x_3} = 0$ puesto que x_1 y x_3 son variables estocásticas independientes, entonces:

$$\sigma_{\gamma_1}^2 = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_3}^2 = 25''^2 + 25''^2 = 50''^2$$

$$\sigma_{\gamma_1} = \sqrt{50''^2} = 7.07''$$

Si se calcula γ_1 en función de β_1 y β_2 suponiendo que son independientes:

$$\sigma_{\gamma_1}^2 = \sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_2}^2 = 50''^2 + 50''^2 = 100''^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{\beta_1} = \sqrt{100''^2} = 10''$$

El porcentaje de la diferencia en el cálculo del error estándar es:

$$\frac{10'' - 7.07''}{7.07''} 100 = 41.4\%$$

En consecuencia, las covarianzas deben ser consideradas toda vez que sea necesario.

La media ponderada:

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto de n observaciones repetidas de una dada magnitud X . Dicho conjunto es una muestra de tamaño n extraída de una población infinitamente grande. La media muestral \bar{X} que estima a la media poblacional μ (verdadero valor de la magnitud X) es:

$$\bar{X} = \frac{[x]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (30)$$

cuya varianza es: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ y estima a la varianza poblacional σ_{μ}^2 . La muestra se subdivide en m subconjuntos de tamaños n_1, n_2, \dots, n_m , tales que:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{j=1}^m n_j$$

Para los m subconjuntos, se tiene:

$$\bar{X}_1 = \frac{x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + \dots + x_{n_1}^{(1)}}{n_1}; \quad \sigma_{\bar{X}_1}^2 = \frac{\sigma^2}{n_1} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_1}^2}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + \dots + x_{n_2}^{(2)}}{n_2}; \quad \sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma^2}{n_2} \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_2}^2}$$

.....

$$\bar{X}_m = \frac{x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \dots + x_{nm}^{(m)}}{n_m}; \quad \sigma_{\bar{X}_m}^2 = \frac{\sigma^2}{n_m} \quad \rightarrow \quad n_m = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_m}^2}$$

Sumando miembro a miembro las ultimas expresiones:

$$n = \sum_{j=1}^m n_j = \sigma^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}$$

De las anteriores:

$$\sum_1 = x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + \dots + x_{n_1}^{(1)} = n_1 \bar{X}_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_1}^2} \bar{X}_1$$

$$\sum_2 = x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + \dots + x_{n_2}^{(2)} = n_2 \bar{X}_2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_2}^2} \bar{X}_2$$

.....

$$\sum_m = x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \dots + x_{n_m}^{(m)} = n_m \bar{X}_m = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_m}^2} \bar{X}_m$$

Sumando miembro a miembro:

$$\sum_1 + \sum_2 + \dots + \sum_m = n\bar{X} = \sum_{j=1}^m n_j \bar{X}_j = \sigma^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2} \bar{X}_j; \text{ es decir:}$$

$$n\bar{X} = \sigma^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2} \bar{X}_j$$

Despejando \bar{X} :

$$\bar{X} = \frac{\sigma^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2} \bar{X}_j}{\sigma^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}} = \frac{\frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_1}^2} \bar{X}_1 + \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_2}^2} \bar{X}_2 + \dots + \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_m}^2} \bar{X}_m}{\frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_1}^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_2}^2} + \dots + \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_m}^2}} \quad (31)$$

La (31) es la expresión de la media ponderada, donde: $p_j = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}$ es el peso de la media

de cada subconjunto.

Entonces la media ponderada o pesada es:

$$\bar{X} = \frac{p_1 \bar{X}_1 + p_2 \bar{X}_2 + \dots + p_m \bar{X}_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} = \frac{\sum_{j=1}^m p_j \bar{X}_j}{\sum_{j=1}^m p_j} = \frac{[p\bar{X}]}{[p]} \quad (32)$$

Si cada subconjunto tiene solamente una observación; es decir, $n_1 = n_2 = \dots = n_n = 1$, el peso de cada observación es:

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \quad (33)$$

donde σ_i es el error estándar de la i -ésima observación.

Si todas las observaciones tienen la misma precisión, tienen entonces el mismo error estándar σ , en consecuencia el mismo peso. Podemos asignar peso unidad a todas ellas; es decir:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$$

entonces:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n} \quad (34)$$

Es claro entonces que la media aritmética (34) es un caso particular de la media ponderada o pesada (32), cuando todas las observaciones son de igual precisión.

El peso de una observación es una medida de la calidad de dicha observación, puesto que es inversamente proporcional al cuadrado de su error estándar. Así, el peso de una observación crece conforme disminuye su error estándar.

El error medio cuadrático o error estándar de la observación de peso 1:

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una serie de observaciones de una dada magnitud X , con distintos pesos $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$. La media ponderada es:

$$\bar{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Consideremos una observación ficticia con peso 1: $p = 1$.

El sistema de correcciones correspondiente es:

v_1	con peso p_1
v_2	con peso p_2
.....	
v_n	con peso p_n

Si llamamos v a la corrección de la observación ficticia con peso 1 ($p = 1$), se tiene:

$$p_1 v_1^2 = p_2 v_2^2 = \dots = p_n v_n^2 = v^2 \quad (35)$$

Puesto que existe una relación inversa entre pesos y correcciones:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{v_j^2}{v_i^2} \rightarrow p_i v_i^2 = p_j v_j^2 \rightarrow v_i^2 = \frac{p_j}{p_i} v_j^2 \quad (36)$$

Si j indica la observación ficticia de peso 1 ($p_j = 1$):

$$v_i^2 = \frac{v^2}{p_i} \rightarrow v_i = \frac{v}{\sqrt{p_i}} \quad (37)$$

La corrección de la observación de peso 1 es:

$$v = v_i \sqrt{p_i} \quad (38)$$

Para reducir el sistema de correcciones a la unidad de peso (es decir que todas las observaciones tengan peso 1), se debe multiplicar cada corrección por la raíz cuadrada de su peso. El sistema de las correcciones con peso 1 es entonces:

$$\begin{array}{l} v_1 \sqrt{p_1} \quad \text{con peso 1} \\ v_2 \sqrt{p_2} \quad \text{con peso 1} \\ \dots\dots\dots \\ v_n \sqrt{p_n} \quad \text{con peso 1} \end{array}$$

El error estándar de una observación para n observaciones de igual precisión (todas con peso 1), se obtiene de:

$$\sigma^2 = \frac{(v_1 \sqrt{p_1})^2 + (v_2 \sqrt{p_2})^2 + \dots + (v_n \sqrt{p_n})^2}{n-1} \quad (39)$$

$$\sigma^2 = \frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{n-1} = \frac{[p v v]}{n-1} \quad (40)$$

entonces el error estándar de la observación de peso 1 es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[p v v]}{n-1}} \quad (41)$$

Error estándar de la media ponderada:

La media ponderada es: $\bar{X} = \frac{[x]}{n}$

$$\bar{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{[p]}$$

es decir:

$$\bar{X} = \frac{p_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2}{[p]}x_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]}x_n \quad (42)$$

Asumiendo que x_1, x_2, \dots, x_n son variables estocásticas independientes (de hecho lo son, puesto que el resultado de una observación no influye en resultado de otra), puede aplicarse a la (42) la ley de Gauss propagación de los errores de observación:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{p_1^2}{[p]^2}\sigma_1^2 + \frac{p_2^2}{[p]^2}\sigma_2^2 + \dots + \frac{p_n^2}{[p]^2}\sigma_n^2 \quad (43)$$

Puesto que: $p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$, donde σ^2 es la varianza de la observación de peso 1, se tiene:

$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{p_i}$. Reemplazando en (43):

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{p_1^2}{[p]^2} \frac{\sigma^2}{p_1} + \frac{p_2^2}{[p]^2} \frac{\sigma^2}{p_2} + \dots + \frac{p_n^2}{[p]^2} \frac{\sigma^2}{p_n} = \frac{p_1}{[p]^2} \sigma^2 + \frac{p_2}{[p]^2} \sigma^2 + \dots + \frac{p_n}{[p]^2} \sigma^2 \\ \sigma_{\bar{x}}^2 &= \left[\frac{p_1}{[p]^2} + \frac{p_2}{[p]^2} + \dots + \frac{p_n}{[p]^2} \right] \sigma^2 = \frac{[p]}{[p]^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{[p]} \end{aligned}$$

donde el error estándar de la media ponderada es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{[p]}} \quad (44)$$

Una estimación del error estándar de la media ponderada es:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} \quad (45)$$

En síntesis se tiene:

Observaciones de distinta precisión

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$
 Media ponderada:

$$\bar{X} = \frac{[px]}{[p]}$$

Error estándar de la observación de peso 1

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

Error estándar de la media ponderada

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}$$

Observaciones de igual precisión

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$
 Media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{[x]}{n}$$

Error estándar de una observación

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

Error estándar de la media aritmética

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

Primera propiedad de la media ponderada

$$[pv]=0$$

Segunda propiedad de la media ponderada

$$[pvv]=\text{mínimo}$$

Primera propiedad de la media aritmética

$$[v]=0$$

Segunda propiedad de la media aritmética

$$[vv]=\text{mínimo}$$

Las observaciones de igual precisión, son un caso particular de las observaciones de distinta precisión.

Ejemplo3: Mediante una nivelación geométrica, se han medido los desniveles de la figura siguiente con el objeto de darle cota al punto F desde los puntos A, B, C, D y E de cotas conocidas.

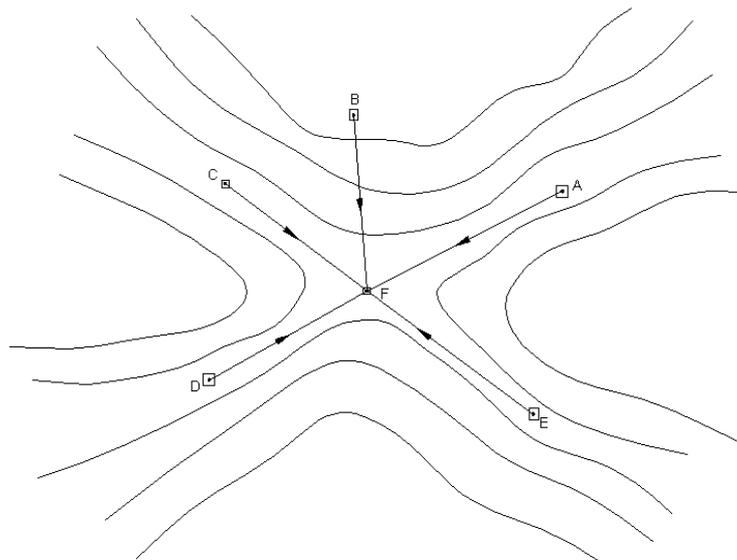


figura 16

Hallar:

- i.- la media ponderada de la cota en F.
- ii.- el error estándar de la observación de peso 1.
- iii.- el error estándar de la media ponderada.
- iv.- un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional.

Datos:

Pto.	Cota(m)	Desniv.(m)	Cota F(m)	Dist(km)	Peso=1/D(km)
A	895.40	-99.95	795.45	4.7	0.21
B	922.73	-127.23	795.50	4.5	0.22
C	873.25	-77.79	795.46	5.3	0.19
D	850.15	-54.63	795.52	3.5	0.29
E	802.98	-7.54	795.44	2.7	0.37

i), ii), iii): $\bar{X}, \sigma, \sigma_{\bar{X}}$

x: cota F(m)	peso	v_i (m)	$p_i v_i$	v_i^2	$p_i v_i^2$
795.45	0.21	0.023	0.00483	0.000529	0.000111
795.50	0.22	-0.027	-0.00594	0.000729	0.000160
795.46	0.19	0.013	0.00247	0.000169	0.000032

795.52	0.29	-0.046	-0.0133	0.002120	0.000615
795.44	0.37	0.033	0.0122	0.001090	0.000403

$$\bar{X} = 795.473 \quad [p] = 1.28 \quad [p_i v_i] = 0.00023 \quad [p_i v_i^2] = 0.00132$$

$$[px] = 0.6055$$

Media ponderada: $\bar{X} = \frac{[px]}{[p]} = \frac{0.6055}{1.28} = 0.473 \rightarrow \bar{X} = 795.473 m$

Error estándar de la observación de peso 1: $\sigma = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.00132}{5-1}} = 0.018 m$

Error estándar de la media ponderada: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{[p]}} = \frac{0.018}{\sqrt{1.28}} = 0.016 m$

iv) Un intervalo de confianza para la media poblacional (95%)

Grados de libertad: $\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$, $t_{\nu, 1-\alpha/2} = t_{4, 0.975} = 2.78$

$$LS = \bar{X} + t_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}} = 795.473 + 2.78 \cdot 0.0160 = 795.517 m$$

$$LI = \bar{X} - t_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}} = 795.473 - 2.78 \cdot 0.0160 = 795.428 m$$

Intervalo de confianza del 95% para la media ponderada: $(795.428 \leq X_F \leq 795.517) m$

nota: justifique que el peso de un desnivel geométrico es inversamente proporcional a la distancia expresada en kilómetros. ¿que ocurre en el caso de la nivelación trigonométrica?

Observaciones duplicadas:

Si una magnitud dada es observada dos veces en las mismas condiciones, la diferencia de los valores obtenidos servirá para la determinación del error estándar del valor más probable de la magnitud medida. En efecto, sean l_1 y l_1' ambas observaciones:

$$l_1 - l_1' = d_1 \quad (46)$$

y el valor más probable de la magnitud es:

$$\bar{l}_1 = \frac{l_1 + l_1'}{2} \quad (47)$$

Las correcciones aparentes son:

$$v_1 = \bar{l}_1 - l_1 = -\frac{d_1}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = \bar{l}_1 - l_1' = \frac{d_1}{2} \quad (48)$$

El error estándar de una observación es:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{[vv]}{2-1}} = \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_1^2}{4}} = \sqrt{2 \frac{d_1^2}{4}} = \frac{d_1}{\sqrt{2}} \quad (49)$$

y el error estándar de la media aritmética es:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{d_1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{d_1}{2} \quad (50)$$

Es decir que el error estándar de la media aritmética de una observación duplicada de una misma magnitud es igual a la mitad de la diferencia entre ambas observaciones.

Si las observaciones de n magnitudes se realizan en la misma forma (duplicadas) y en las mismas condiciones, se tendrán valores $l_1, l_2, \dots, l_n; l'_1, l'_2, \dots, l'_n$ y si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$ son los respectivos errores verdaderos, tendremos:

$$\begin{array}{lcl} l_1 + \varepsilon_1 = l'_1 + \varepsilon'_1 & & d_1 = l_1 - l'_1 = \varepsilon'_1 - \varepsilon_1 \\ l_2 + \varepsilon_2 = l'_2 + \varepsilon'_2 & & d_2 = l_2 - l'_2 = \varepsilon'_2 - \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots & \rightarrow & \dots\dots\dots \\ l_n + \varepsilon_n = l'_n + \varepsilon'_n & & d_n = l_n - l'_n = \varepsilon'_n - \varepsilon_n \end{array}$$

Elevando al cuadrado las expresiones de la segunda columna, sumandos y dividiendo por n, ambos miembros, resulta:

$$\frac{[dd]}{n} = \frac{[\varepsilon' \varepsilon']}{n} + \frac{[\varepsilon \varepsilon]}{n} - 2 \frac{[\varepsilon \varepsilon']}{n} \quad (51)$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de (51) son las varianzas de las observaciones l'_i y l_i , $i = 1, n$, respectivamente, y puesto que ambas series se consideran igualmente precisas, ambos errores estándar resultan iguales y los denotamos por σ . El tercer término es nulo puesto que las observaciones son independientes y la covarianza $\frac{[\varepsilon \varepsilon']}{n}$, resulta igual a cero. Entonces:

$$\frac{[dd]}{n} = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2 \quad (52)$$

de donde el error estándar de una observación simple es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \quad (53)$$

y el error estándar de una observación duplicada es:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \quad (54)$$

Si las observaciones son de distinta precisión, se tiene:

error estándar de una observación simple: $\sigma = \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}$ (55)

error estándar de una observación doble: $\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pdd]}{n}}$ (56)

Ejemplo 4: Una base subdividida en n tramos iguales, ha sido medida en ida y vuelta (observaciones duplicadas), obteniéndose los siguientes resultados:

$l_1, l'_1, l_2, l'_2, \dots, l_n, l'_n$, donde l_i son las observaciones de ida y l'_i son las de la vuelta.
¿Cual es el error estándar de la base medida?

Las longitudes más probables y sus errores estándar, son:

$$\begin{array}{ll} \bar{l}_1 = \frac{l_1 + l'_1}{2} & \sigma_{i1} = \frac{d_1}{2} \\ \bar{l}_2 = \frac{l_2 + l'_2}{2} & \sigma_{i2} = \frac{d_2}{2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \bar{l}_n = \frac{l_n + l'_n}{2} & \sigma_{in} = \frac{d_n}{2} \end{array}$$

La longitud de la base es: $\bar{L} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_n$, aplicando la ley de Gauss de la propagación de los errores de observación:

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2 + \dots + \sigma_{in}^2} = \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + \dots + \frac{d_n^2}{4}} = \sqrt{\frac{[dd]}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{[dd]}$$

Considerando ahora que todos los tramos tienen igual peso (puesto que tienen la misma longitud), hacemos $p_i = 1, i = n$, entonces, de $\bar{L} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \dots + \bar{l}_n$ y $\sigma_{i1} = \sigma_{i2} = \dots = \sigma_{in}$

$\sigma_{\bar{L}}^2 = \sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2 + \dots + \sigma_{in}^2 = n \sigma_i^2$ donde σ_i^2 es el cuadrado del error estándar de una observación duplicada. El error estándar de la base es, según la (54):

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{n} \sigma_i = \sqrt{n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} [dd]} = \frac{1}{2} \sqrt{[dd]}$$

y se llega al mismo resultado.

Propagación de los errores en la nivelación geométrica:

En la aplicación más simple tenemos dos puntos altimétricos con cotas conocidas y entre ellos un conjunto de puntos con cotas desconocidas. Mediante la aplicación repetida de este método de nivelación, se obtienen varias estimaciones de las diferencias de alturas (desniveles) y las observaciones redundantes o excedentes permiten obtener

estimaciones de las varianzas y errores estándar. Sabemos que las varianzas “a-priori” dependen de las distancias. Si se tienen distancias aproximadamente iguales entre las miras (atrás y adelante), el desnivel entre los puntos A y B, figura 17, es.

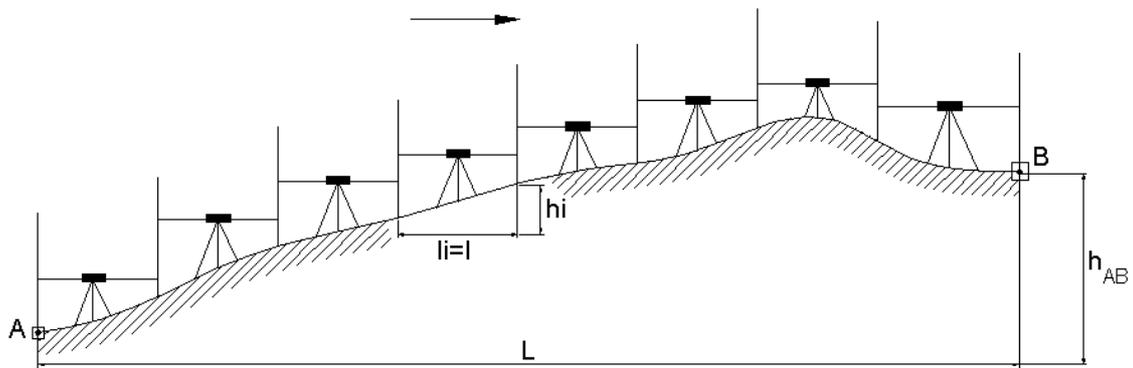


figura 17

$$h_{AB} = h_1 + h_2 + \dots + h_n \quad (57)$$

La figura 17 muestra el i-ésimo desnivel medido entre los puntos A y B. El plano visual PV no coincide exactamente con el plano del horizonte PH, luego el error de lectura es δ_i , figura 18, tanto para la lectura atrás l_{ati} como para la lectura adelante l_{adi} , si el nivel se coloca en la mitad de la distancia l_i .

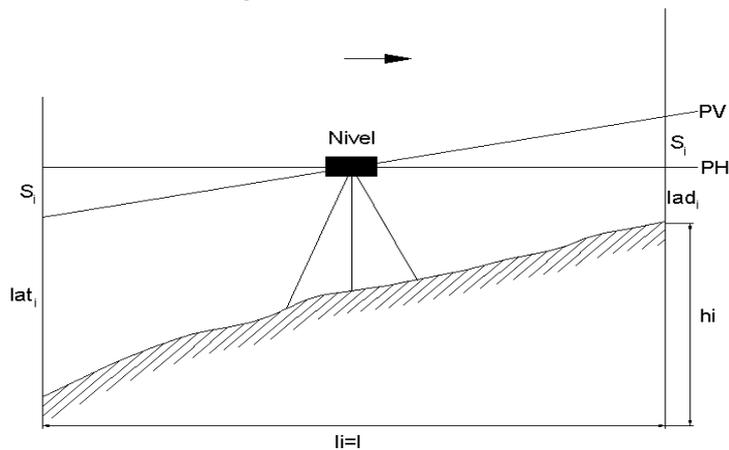


figura 18

El desnivel h_i es:

$$h_i = l_{ati} - l_{adi} \quad (58)$$

La varianza estimada del i-ésimo desnivel medido es:

$$\sigma_i^2 = \delta_i^2 + \delta_i^2 = 2 \delta_i^2 \quad (59)$$

La desviación estándar es:

$$\sigma_i = \sqrt{2} \delta_i \quad (60)$$

Aplicando la ley de propagación de los errores de observación a la (57):

$$\hat{\sigma}_{hAB}^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \dots + \hat{\sigma}_n^2 \quad (61)$$

Si ubicamos el nivel equidistante respecto de las miras:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \dots = \hat{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}^2$$

y todas las observaciones tendrán el mismo peso; la (61) se expresa por:

$$\hat{\sigma}_{hAB}^2 = n \hat{\sigma}^2 \quad (62)$$

De la figura 17, $L = n l \rightarrow n = \frac{L}{l}$, reemplazando en (62) el error estándar del desnivel h_{AB} , es:

$$\hat{\sigma}_{hAB} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{l}} \sqrt{L} \quad (63)$$

Tanto L como l se expresan en kilómetros. La cantidad:

$$\varepsilon_{km} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{l(km)}} \quad (64)$$

se denomina el “error kilométrico” y es una característica de cada nivel. Entonces la expresión:

$$\hat{\sigma}_{hAB} = \varepsilon_{km} \sqrt{L(km)} \quad (65)$$

permite estimar el error estándar del desnivel h_{AB} , correspondiente a una distancia horizontal L expresada en kilómetros y medido con un nivel de característica ε_{km} .

La varianza es $\hat{\sigma}_{hAB}^2 = \varepsilon_{km}^2 L(km)$ y el peso es inversamente proporcional a la varianza; es decir:

$$p \approx \frac{1}{L(km)} \quad (66)$$

El peso es, en definitiva, inversamente proporcional a la distancia expresada en kilómetros.

Nivelación geométrica ida y vuelta:

Supongamos ahora que se hace nivelación geométrica ida y vuelta; es decir se tiene una observación duplicada por cada desnivel. En la figura 19 se representa un ejemplo con cinco desniveles dobles; es decir, cinco tramos de nivelación doble.

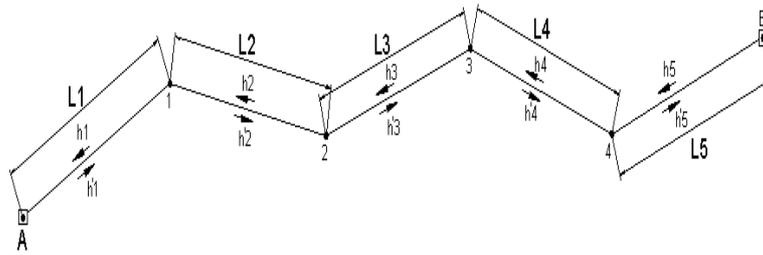


figura 19

Para n tramos, en general:

$$\begin{aligned} \text{Ida: } & \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \\ \text{Vuelta: } & \{h'_1, h'_2, \dots, h'_n\} \\ \text{Distancias: } & \{l_1, l_2, \dots, l_n\} \end{aligned}$$

Si las distancias de los tramos son iguales: $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$, el error estándar de un desnivel simple es, según (53):

$$\sigma = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$$

y el error estándar de un desnivel doble es, según (54):

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n}}$$

Supongamos ahora que los tramos de nivelación l_i no son iguales, hecho este que está más cerca de la realidad: $l_1 \neq l_2 \neq \dots \neq l_n$. Adoptamos una distancia de referencia l_0 con varianza σ_0^2 . Para una distancia l_i con varianza σ^2 , podemos escribir:

$$\frac{\sigma_0^2}{l_0} = \frac{\sigma^2}{l_i} \rightarrow \sigma_0^2 = \frac{l_0}{l_i} \sigma^2$$

Reemplazando σ^2 por (53):

$$\sigma_0^2 = \frac{l_0}{l_i} \frac{[dd]}{2n} = \frac{l_0}{2n} \left[\frac{dd}{l} \right] \quad (67)$$

Puesto que el peso de un desnivel es $p_i = \frac{1}{l_i}$, reemplazando en (67):

$$\sigma_0^2 = \frac{l_0}{2n} [pdd] \quad (68)$$

Si la distancia de referencia es $l_0 = 1$ km, el error estándar de una observación (desnivel) simple de un total de n tramos es:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{2n} [pdd]} \quad (69)$$

y el error estándar de una observación (desnivel) doble de un total de n tramos es, para una distancia de referencia $l_0 = 1$ km:

$$\sigma_{\bar{0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pdd]}{n}} \quad (70)$$

La (70) expresa el error estándar de una observación (desnivel) doble en $\frac{mm}{\sqrt{km}}$ para el i -ésimo tramo. Para L (km), el error propagado al desnivel total h_{AB} , expresado en mm, es:

$$\sigma_{h_{AB}} = \sigma_{\bar{0}} \sqrt{L(km)} \quad (71)$$

Ejemplo 5: Se conocen las cotas de dos puntos fijos A y B, $H_A = 40.3900$ m y $H_B = 47.4800$ m. Se realiza una nivelación geométrica ida y vuelta entre ambos puntos fijos para darle cota a cada una de las 14 estaciones intermedias. Hallar el error estándar de un desnivel simple, el error estándar de un desnivel doble y el error del desnivel total.

Datos:

tramo	dist.(km)	ida(m)	vuelta(m)	media(m)	dif.(mm)
A-1	0.27	-3.3070	-3.3086	-3.3078	1.6
1-2	0.29	2.7865	2.7878	2.7872	-1.3
2-3	0.53	6.2735	6.2741	6.2738	-0.6
3-4	0.30	0.8595	0.8598	0.8596	-0.3
4-5	0.32	0.7122	0.7115	0.7118	0.7
5-6	0.54	3.9840	3.9847	3.9844	-0.7
6-7	0.40	3.1330	3.1310	3.1320	2.0
7-8	0.39	-2.5040	-2.5008	-2.5024	-3.2
8-9	0.48	2.1531	2.1553	2.1542	-2.2
9-10	0.28	-1.3458	-1.3483	-1.3470	2.5
10-11	0.49	-2.9557	-2.9550	-2.9554	-0.7
11-12	0.39	-2.2370	-2.2342	-2.2356	-2.8
12-13	0.36	-1.8665	-1.8632	-1.8648	-3.3
13-14	0.38	3.0875	3.0874	3.0874	0.1
14-B	0.37	-1.6803	-1.6797	-1.6800	-0.6

$$\Sigma = 5.79 \quad \Sigma = 7.0930 \quad \Sigma = 7.1018 \quad \Sigma = 7.0974 \quad \Sigma = -8.8$$

Error estándar para un desnivel simple ($l_0 = 1 \text{ km}$)

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2n} \left[\frac{dd}{l} \right] = \frac{1}{2 \cdot 15} \left[\frac{(1.6 \text{ mm})^2}{0.27 \text{ km}} + \frac{(-1.3 \text{ mm})^2}{0.29 \text{ km}} + \dots + \frac{(-0.6 \text{ mm})^2}{0.37 \text{ km}} \right] = 4.66 \frac{\text{mm}^2}{\text{km}}$$

Error estándar de un desnivel doble ($l_0 = 1 \text{ km}$)

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{dd}{l} \right]} = \frac{1}{2} \sqrt{9.32 \frac{\text{mm}^2}{\text{km}}} = 1.53 \frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}$$

Error estándar del desnivel total h_{AB} :

$$\sigma_{h_{AB}} = \sigma_0 \sqrt{L(\text{km})} = 1.53 \frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}} \sqrt{5.79 \text{ km}} = 3.68 \text{ mm}$$

Error de cierre:

$$\omega = H_B - H_A - \frac{\Sigma(h_i + h'_i)}{2} = 47.4800 - 40.3900 - 7.0974 = -0.0074 \text{ m} = -7.4 \text{ mm}$$

Error máximo tolerable: $e_t = 2.6 \sigma_{h_{AB}} = 2.6 \cdot 3.68 \text{ mm} = 9.6 \text{ mm}$

El error de cierre en valor absoluto, es menor que la tolerancia o máximo error tolerable; es decir $|\omega| < e_t$.

Propagación de errores en la poligonación:

Sea la poligonal de la figura 20:

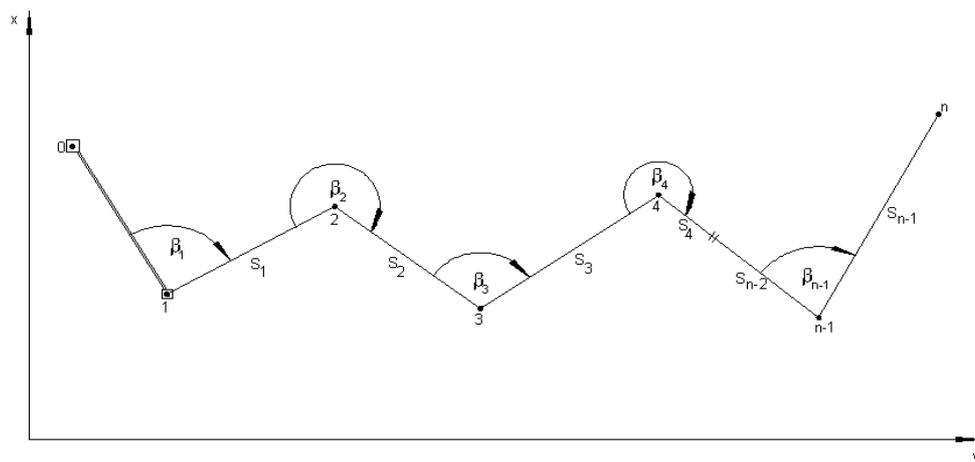


figura 20

Se conoce:

$(X_0, Y_0), (X_1, Y_1)$: coordenadas de los puntos fijos 0 y 1
 R_{01} : rumbo de la dirección 0-1

- σ_{R01} : error estándar del rumbo 0-1
 σ_{X1}, σ_{Y1} : errores estándar de las coordenadas del punto 1 en las direcciones de los ejes coordenados X e Y
 β_i, s_i : ángulos y distancias observadas
 $\sigma_{\beta_i}, \sigma_{s_i}$: errores estándar de las observaciones

Se desea evaluar los errores propagados a las coordenadas del punto k. Las coordenadas planas de los puntos 2, 3, 4, ..., k - 1, k se obtienen de las siguientes formulas topográficas:

$$X_2 = X_1 + s_1 \cos R_{12} = X_1 + s_1 \cos(R_{01} + \beta_1 - 180)$$

$$Y_2 = Y_1 + s_1 \text{sen} R_{12} = Y_1 + s_1 \text{sen}(R_{01} + \beta_1 - 180)$$

$$X_3 = X_2 + s_2 \cos R_{23} = X_1 + s_1 \cos(R_{01} + \beta_1 - 180) + s_2 \cos(R_{01} + \beta_1 + \beta_2 - 2.180)$$

$$Y_3 = Y_2 + s_2 \text{sen} R_{23} = Y_1 + s_1 \text{sen}(R_{01} + \beta_1 - 180) + s_2 \text{sen}(R_{01} + \beta_1 + \beta_2 - 2.180)$$

$$X_k = X_1 + s_1 \cos(R_{01} + \beta_1 - 180) + s_2 \cos(R_{01} + \beta_1 + \beta_2 - 2.180) + \dots + s_{k-1} \cos(R_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} - (k-1)180) \quad (72)$$

$$Y_k = Y_1 + s_1 \text{sen}(R_{01} + \beta_1 - 180) + s_2 \text{sen}(R_{01} + \beta_1 + \beta_2 - 2.180) + \dots + s_{k-1} \text{sen}(R_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} - (k-1)180) \quad (73)$$

entonces:

$$X_k = f(X_1, R_{01}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}) \quad (74)$$

$$Y_k = g(X_1, R_{01}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}) \quad (75)$$

Aplicando la ley de propagación de los errores de observación a (74) y (75), y considerando que las observaciones son independientes:

$$\sigma_{Xk}^2 = \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_{X1}^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial R_{01}}\right)^2 \sigma_{R01}^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_1}\right)^2 \sigma_{\beta1}^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_2}\right)^2 \sigma_{\beta2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_{k-1}}\right)^2 \sigma_{\beta_{k-1}}^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial s_1}\right)^2 \sigma_{s1}^2 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial s_2}\right)^2 \sigma_{s2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial X_k}{\partial s_{k-1}}\right)^2 \sigma_{s_{k-1}}^2 \quad (76)$$

$$\sigma_{Yk}^2 = \left(\frac{\partial Y_k}{\partial Y_1}\right)^2 \sigma_{Y1}^2 + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial R_{01}}\right)^2 \sigma_{R01}^2 + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial \beta_1}\right)^2 \sigma_{\beta1}^2 + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial \beta_2}\right)^2 \sigma_{\beta2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial \beta_{k-1}}\right)^2 \sigma_{\beta_{k-1}}^2 + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial s_1}\right)^2 \sigma_{s1}^2 + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial s_2}\right)^2 \sigma_{s2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial Y_k}{\partial s_{k-1}}\right)^2 \sigma_{s_{k-1}}^2 \quad (77)$$

Desarrollando las derivadas parciales en la (76)

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial X_1} &= 1 \\ \frac{\partial X_k}{\partial R_{01}} &= -s_1 \operatorname{sen} R_{12} - s_2 \operatorname{sen} R_{23} - \dots - s_{k-1} \operatorname{sen} R_{k-1k} = -\sum_{i=1}^{k-1} \Delta Y_i = -(Y_k - Y_1) \\ \frac{\partial X_k}{\partial \beta_1} &= -s_1 \operatorname{sen} R_{12} - s_2 \operatorname{sen} R_{23} - \dots - s_{k-1} \operatorname{sen} R_{k-1k} = -\sum_{i=1}^{k-1} \Delta Y_i = -(Y_k - Y_1) \\ \frac{\partial X_k}{\partial \beta_2} &= -s_2 \operatorname{sen} R_{23} - \dots - s_{k-1} \operatorname{sen} R_{k-1k} = -\sum_{i=2}^{k-1} \Delta Y_i = -(Y_k - Y_2) \\ &\dots \\ \frac{\partial X_k}{\partial \beta_{k-1}} &= -s_{k-1} \operatorname{sen} R_{k-1k} = -\sum_{i=k-1}^{k-1} \Delta Y_i = -(Y_k - Y_{k-1}) \\ \frac{\partial X_k}{\partial s_1} &= \cos R_{12} = \frac{X_2 - X_1}{s_1} \\ \frac{\partial X_k}{\partial s_2} &= \cos R_{23} = \frac{X_3 - X_2}{s_2} \\ &\dots \\ \frac{\partial X_k}{\partial s_{k-1}} &= \cos R_{k-1k} = \frac{X_k - X_{k-1}}{s_{k-1}} \end{aligned}$$

Reemplazando en la (76), se tiene la varianza de X_k :

$$\sigma_{X_k}^2 = \sigma_{X_1}^2 + (Y_k - Y_1)^2 \sigma_{R_{01}}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (Y_k - Y_i)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{s_i} \right)^2 \sigma_{s_i}^2 \quad (78)$$

Desarrollando las derivadas parciales en (77):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_k}{\partial X_1} &= 1 \\ \frac{\partial Y_k}{\partial R_{01}} &= s_1 \cos R_{12} + s_2 \cos R_{23} + \dots + s_{k-1} \cos R_{k-1k} = \sum_{i=1}^{k-1} \Delta X_i = (X_k - X_1) \\ \frac{\partial Y_k}{\partial \beta_1} &= s_1 \cos R_{12} + s_2 \cos R_{23} + \dots + s_{k-1} \cos R_{k-1k} = \sum_{i=1}^{k-1} \Delta X_i = (X_k - X_1) \\ \frac{\partial Y_k}{\partial \beta_2} &= s_2 \cos R_{23} + \dots + s_{k-1} \cos R_{k-1k} = \sum_{i=2}^{k-1} \Delta X_i = (X_k - X_2) \\ &\dots \\ \frac{\partial Y_k}{\partial \beta_{k-1}} &= s_{k-1} \cos R_{k-1k} = \sum_{i=k-1}^{k-1} \Delta X_i = (X_k - X_{k-1}) \\ \frac{\partial Y_k}{\partial s_1} &= \operatorname{sen} R_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{s_1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Y_k}{\partial s_2} = \text{sen } R_{23} = \frac{Y_3 - Y_2}{s_2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial Y_k}{\partial s_{k-1}} = \text{cos } R_{k-1k} = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{s_{k-1}}$$

Reemplazando en (77), se tiene la varianza de Y_k :

$$\sigma_{Y_k}^2 = \sigma_{Y_1}^2 + (X_k - X_1)^2 \sigma_{R_{01}}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (X_k - X_i)^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{s_i} \right)^2 \sigma_{s_i}^2 \quad (79)$$

El error estándar en la posición del punto k, es:

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{Xk}^2 + \sigma_{Yk}^2} \quad (80)$$

La varianza es:

$$\sigma_k^2 = \sigma_{Xk}^2 + \sigma_{Yk}^2 \quad (81)$$

Reemplazando en (81) las (78) y (79)

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 = & \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 + \left[(Y_k - Y_1)^2 + (X_k - X_1)^2 \right] \sigma_{R_{01}}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left[(Y_k - Y_i)^2 + (X_k - X_i)^2 \right] \sigma_{\beta_i}^2 + \\ (82) \quad & + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{s_i} \right)^2 + \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{s_i} \right)^2 \right] \sigma_{s_i}^2 \end{aligned}$$

En la (82) se ve que:

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2 &= \sigma_1^2 \\ (X_k - X_1)^2 + (Y_k - Y_1)^2 &= \mathfrak{R}_{1,k}^2 \\ (X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2 &= \mathfrak{R}_{i,k}^2 \\ \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{s_i} \right)^2 + \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{s_i} \right)^2 &= \text{cos}^2 R_{i,i+1} + \text{sen}^2 R_{i,i+1} = 1 \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{R}_{i,k}$ es la distancia entre el vértice i y el vértice k de la poligonal, y $R_{i,i+1}$ es el rumbo de la dirección i, i+1.

La (82) puede expresarse entonces:

$$\sigma_k^2 = \sigma_1^2 + \mathfrak{R}_{ik}^2 \sigma_{R_{01}}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathfrak{R}_{ik}^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{s_i}^2 \quad (83)$$

Los valores de \mathfrak{R}_{ik} pueden obtenerse en forma grafica de una carta o croquis a escala adecuada. Los valores de σ_{R01} y $\sigma_{\beta i}$ deben expresarse en radianes para obtener σ_k en unidades lineales (por ejemplo metros).

Ejemplo 6: Sea la poligonal cerrada de la figura 21:

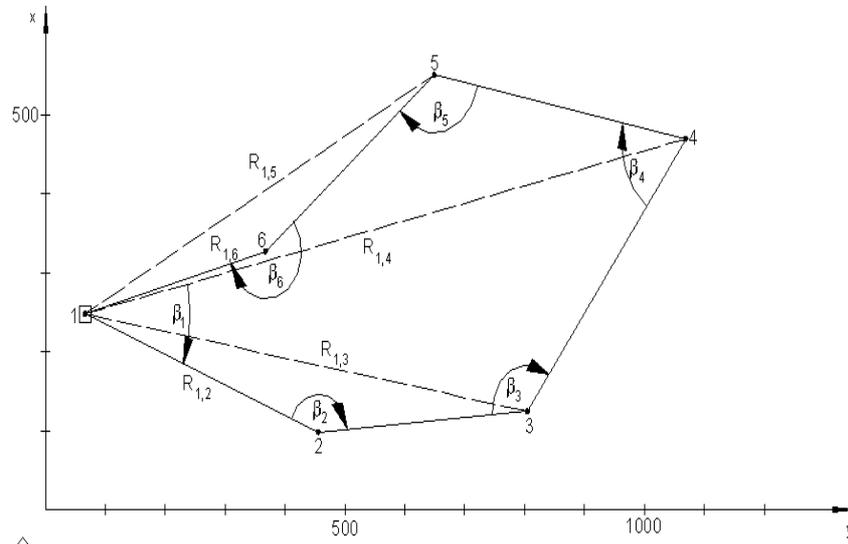


figura 21

Se exige un error relativo de cierre ε_r , definido por $\varepsilon_r \leq \frac{1}{20000}$. Se decide medir las distancias con un distanciómetro que asegura un error lineal $\sigma_s \leq 10$ mm y un teodolito que garantiza un error angular $\sigma_\beta \leq 3''$. Se desea saber si con dichos instrumentos se satisface la condición de cierre preestablecida; es decir, cerrar con un error relativo $\varepsilon_r \leq 1/20000$.

Adoptamos un sistema de coordenadas planas (local) donde las coordenadas del punto 1 y el rumbo del lado 1-2 se consideran libres de errores. Por tratarse de una poligonal cerrada, el punto 1 se superpone con el punto $k = 7$, entonces:

$$\mathfrak{R}_{1,7} = 0; \quad \sigma_1 = 0; \quad \sigma_{R01} = 0$$

Bajo estas condiciones, la (83) es ahora:

$$\sigma_7^2 = \sum_{i=1}^6 \mathfrak{R}_{i6}^2 \sigma_{\beta i}^2 + \sum_{i=1}^6 \sigma_{s_i}^2$$

Tomando gráficamente los valores de \mathfrak{R}_{ik} y s_i :

$\mathfrak{R}_{11} =$	0 m	$s_1 =$	420 m
$\mathfrak{R}_{12} =$	420 m	$s_2 =$	420 m
$\mathfrak{R}_{13} =$	730 m	$s_3 =$	640 m
$\mathfrak{R}_{14} =$	1120 m	$s_4 =$	460 m
$\mathfrak{R}_{15} =$	800 m	$s_5 =$	420 m

$$\frac{\mathfrak{R}_{16} = 400 \text{ m}}{\text{-----}} \quad \frac{s_6 = 420 \text{ m}}{\text{-----}}$$

$$\sum_1^6 \mathfrak{R}_{1i}^2 = 2763700 \text{ m}^2 \quad \sum_1^6 s_i = 2780 \text{ m}$$

$$\sum_1^6 \mathfrak{R}_{1i}^2 \sigma_{\beta i}^2 = 0.000585 \text{ m}^2 ; \quad \sum_1^6 \sigma_{s_i}^2 = 0.000600 \text{ m}^2$$

El error estándar en la posición del punto $k = 7$, es:

$$\hat{\sigma}_7 = \sqrt{0.000585 \text{ m}^2 + 0.000600 \text{ m}^2} = \pm 0.034 \text{ m}$$

El error máximo tolerable es : $e_i = 2.6 \hat{\sigma}_7$, entonces error máximo de cierre aceptable es:

$$\varepsilon_{r \text{ max.}} = \frac{2.6 \hat{\sigma}_7}{\sum_1^6 s_i} = \frac{2.6 \cdot 0.034 \text{ m}}{2780 \text{ m}} = 3.1799 \cdot 10^{-5} = 31.8 \text{ ppm}$$

El requerimiento de no superar de la precisión requerida $\varepsilon_r \leq 1/20000 = 5 \cdot 10^{-5} = 50 \text{ ppm}$ para el cierre de la poligonal, se satisface ampliamente con el instrumental disponible.

-----°-----

TEMA 1: TRABAJO PRÁCTICO 1

Parte I: La distribución normal o gaussiana de los errores de observación.

E1: Sea $\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ la función de frecuencia o densidad de probabilidad de la variable aleatoria respecto de la media; es decir $x = X - \mu$, donde X es la variable estocástica (aleatoria) que representa a las observaciones y μ es la media poblacional o verdadero valor de una dada magnitud que ha sido observada repetidamente un número infinitamente grande de veces. Teniendo en cuenta la relación existente entre el módulo de precisión h de Gauss y la desviación estándar σ de una observación, demuestre que la función de frecuencia o densidad de probabilidad de X (las observaciones) es:

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

E2: Si z es la variable normalizada (estandarizada o tipificada) correspondiente a X (observación); es decir, $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, demostrar que la esperanza o media de z es igual a cero y la varianza de z es igual a 1.

E3: Apoyándose en el E2, demuestre que la función de frecuencia o densidad de probabilidad de la variable normalizada z es $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2}$.

E4: La calificación media de un examen final fue 72 y la desviación estándar 9. El 10% superior de los estudiantes recibirán una calificación A (excelente). ¿Cuál es la calificación mínima que debe obtener un estudiante para recibir A?

E5: En un examen la media fue 78 y la desviación estándar 10.

- i) Determinar las calificaciones estandarizadas de dos estudiantes cuyos puntajes fueron 63 y 92 respectivamente.
- ii) Determinar los puntajes de dos estudiantes cuyas calificaciones estandarizadas fueron -0.6 y 1.2, respectivamente.

E6: Hallar la media y la desviación estándar de un examen en el cual los puntajes 70 y 88 corresponden a calificaciones estandarizadas -0.6 y 1.4, respectivamente.

E7: Se ha efectuado un gran número de observaciones repetidas de una dada magnitud con media $\mu = 145.3$ y desviación estándar $\sigma = 2.1$. Calcular la probabilidad de que una observación quede comprendida en el intervalo: [143.2, 147.4].

E8: Si un conjunto de observaciones esta normalmente distribuido ¿qué porcentaje de ellas diferirá de la media por:

- i) más de una desviación estándar?
- ii) menos de tres cuartos de la desviación estándar?

E9: Si μ es la media y σ es la desviación estándar de un conjunto infinitamente grande de observaciones de una dada magnitud que están normalmente distribuidas, ¿qué porcentaje de esas observaciones:

- i) están dentro del recorrido $\mu \pm 2\sigma$?
- ii) están por fuera del recorrido $\mu \pm 1.2\sigma$?
- iii) son mayores que $\mu - 1.5\sigma$?

E10: En el E9 hallar la constante a, tal que el porcentaje de los casos:

- i) dentro del recorrido $\mu \pm a\sigma$ sea 75%.
- ii) menores que $\mu - a\sigma$ se 22%.

E11: Si las 300 observaciones repetidas de una dada magnitud están distribuidas normalmente con media $\mu = 1.70m$ y desviación estándar $\sigma = 10cm$, ¿Cuántas de esas observaciones:

- i) son mayores que 1.85m?
- ii) son menores o iguales que 1.55m?
- iii) están entre 1.59m y 1.81m?

E12: Se ha medido 35 veces una distancia. Hallar un intervalo de confianza para la media al nivel de significación $\alpha = 0.05$, si la muestra arroja los siguientes estadísticos muestrales:

$$\bar{X} = 732.525m \quad \bar{\sigma} = 0.0087m$$

E13: En el E12 se desea que el error estándar de la media aritmética sea menor que el 50% del error estándar del distanciómetro utilizado en la medición, ¿que tamaño debería tener la muestra?

E14: Una magnitud X se ha observado 500 veces, resultando la media aritmética $\bar{X} = 128.75$ y la desviación estándar de una observación $\bar{\sigma} = 1.25$:

- i) ¿cuántas observaciones serán mayores que 130.63?
- ii) ¿para que valor de a, serán 25 observaciones menores que $\bar{X} - a\bar{\sigma}$?

E15: Durante las pruebas realizadas con un geodímetro, una determinada base ha sido medida 16 veces. Haciendo uso de la tabla siguiente:

reg.	xi(m)	reg.	xi(m)	reg.	xi(m)	reg.	xi(m)
1	6994.911	5	6994.882	9	6994.902	13	6994.896
2	.890	6	.898	10	.901	14	.883
3	.879	7	.885	11	.895	15	.895
4	.895	8	.883	12	.894	16	.902

- i) Sanear la muestra aplicando el criterio de Chauvenet.
- ii) Hallar la media aritmética, el error estándar de una observación y el error estándar de la media aritmética para la muestra saneada.
- iii) Hallar un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional μ .
- iv) Hallar intervalos de confianza del 95% para la varianza poblacional σ^2 y para la desviación estándar poblacional σ .
- v) Hallar el error medio aritmético, el error probable y el máximo error tolerable.

Ejercicios optativos (*)

E1*: Se obtienen 137 errores de cierre en una determinada triangulación, según la tabla siguiente:

reg	intervalo	Marca de clase	frecuencia
1	-1.25", -0.75"	-1.0"	9
2	-0.75", -0.25"	-0.5"	32
3	-0.25", 0.25"	0.0"	45
4	0.25", 0.75"	0.5"	30
5	0.75", 1.25"	1.0"	16
6	1.25", 1.75"	1.5"	5

Determinar al 95% si los errores de cierre tienen distribución normal.

E2*: En la tabla siguiente se muestran los resultados de las pruebas realizadas con determinado distanciómetro:

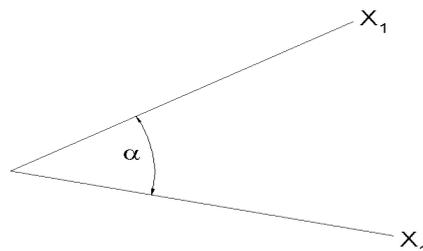
dist(km)	error(cm)	dist(km)	error(cm)
3.0	2.0	5.7	3.0
3.6	5.0	5.8	3.0
4.2	3.0	8.0	4.0
4.6	4.0	10.2	8.0
5.6	6.0		

- i) Estimar los regresores β_0 y β_1 .
- ii) Hallar la recta de ajuste mínimos cuadrados.
- iii) Hallar un intervalo de confianza del 95% para el regresor β_1 y someterlo a una prueba de hipótesis.
- iv) Hallar los coeficientes de determinación y correlación.
- v) Decir si el modelo de regresión lineal simple tiene utilidad.
- vi) Estimar el error de la distancia medida, para 5000m.

.....°.....

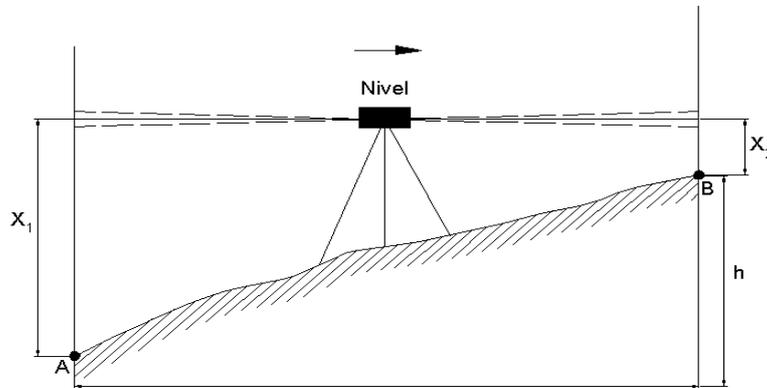
Parte II: Propagación de los errores de observación.

E 1: Un ángulo horizontal α se obtiene mediante la diferencia de las dos direcciones horizontales x_1 , x_2 (ver figura). Si ambas direcciones horizontales tienen el mismo error estándar $\sigma_x = \pm 10''$ ¿Cuál es el error estándar del ángulo α ?



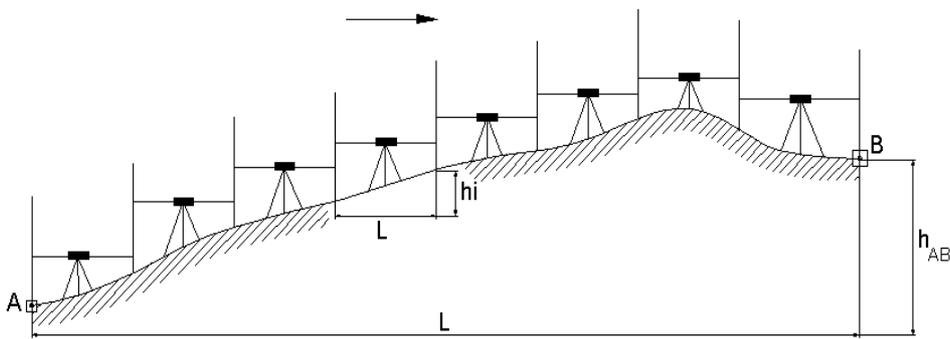
figura

E 2: Con un nivel estacionado entre dos miras colocadas sobre sapos y a igual distancia, se ha determinado el desnivel h entre sapos. Siendo el error medio de una visual $\sigma_x = \pm 1mm$ e igual atrás y adelante ¿cual es el error estándar del desnivel h ? (ver figura).



figura

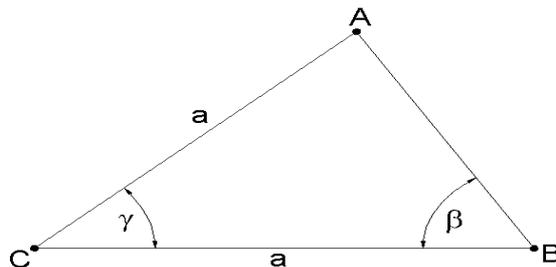
E 3: Sea L la distancia horizontal entre dos puntos fijos de nivelación de una línea a nivelar con visuales de longitud uniforme (ver figura)



figura

Si σ es el error de un desnivel parcial ¿cual es el error estándar del desnivel entre los puntos fijos A y B?

E 4: La posición de un punto A ha sido determinada mediante la medición de una base $a = 465.24 m$ y los ángulos $\beta = 48^\circ 25' 10''$ y $\gamma = 72^\circ 15' 25''$. Siendo el error estándar de la base $\sigma_a = \pm 0.05m$ y el error estándar de los ángulos $\sigma_\beta = \sigma_\gamma = \pm 10''$ ¿con que error estándar queda determinado el lado b? Hallar el error relativo en ppm.



figura

E 5: Dado $h = D \cot z + \frac{1-k}{2R} D^2$ (nivelación trigonométrica), determinar el valor del

desnivel trigonométrico h y su error estándar, siendo:

$$z = 86^\circ 15' 42'' \text{ (distancia cenital); } \sigma_z = \pm 3''$$

$$D = 5000 \text{ m (distancia horizontal); } \sigma_D = \pm 0.50 \text{ m}$$

$$k = 0.13 \text{ (coeficiente de refracción); } \sigma_k = \pm 0.03$$

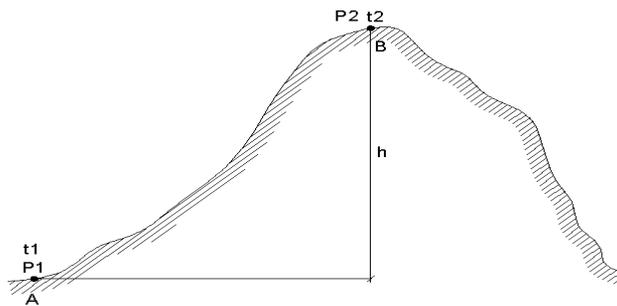
$$R = 6371 \text{ km (radio terrestre medio)}$$

E 6: Dado $h = 8002 (1 + \alpha t_m) \ln \frac{p_1}{p_2}$ (nivelación barométrica) donde:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2} \text{ (temperatura media), } t_1 = 20^\circ\text{C, } t_2 = 4^\circ\text{C, } \sigma_t = \pm 0.5^\circ\text{C}$$

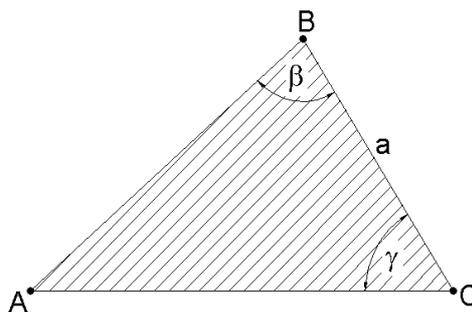
$$p_1 = 722 \text{ mm Hg, } p_2 = 680 \text{ mm Hg, } \sigma_p = \pm 0.1 \text{ mm Hg, } \alpha = \frac{1}{273}$$

Hallar el valor del desnivel barométrico h y su error estándar.



figura

E 7: Dado el triángulo plano ABC con los datos siguientes:



figura

$$a = 405.24 \text{ m} \quad \sigma = \pm 0.05 \text{ m}$$

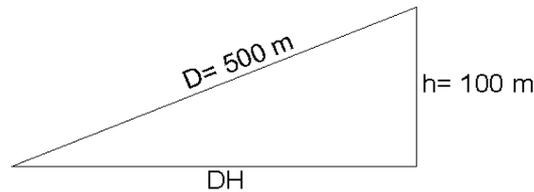
$$\beta = 48^\circ 25' 10'' \quad \sigma = \pm 10''$$

$$\gamma = 72^\circ 15' 25'' \quad \sigma = \pm 10''$$

Determinar el área y su error estándar.

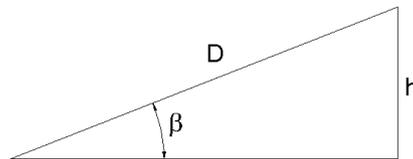
E 8: Se mide una distancia inclinada de 500 m entre dos puntos con una diferencia de nivel de 100 m. ¿Cuál es la tolerancia para el error en el desnivel si se desea obtener la corrección por reducción al horizonte con un error estándar $\hat{\sigma}_{CRH} = \pm 1 \text{ mm}$.

La corrección por reducción al horizonte es: $C_{RH} = -\frac{h^2}{2D}$



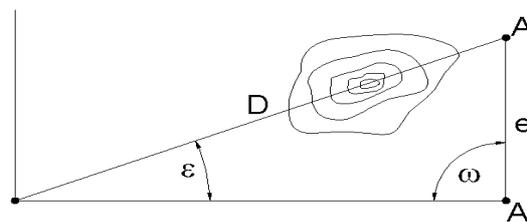
figura

E 9: Una distancia inclinada D y un ángulo vertical β deben medirse a los efectos de calcular un desnivel h . ¿cuales serán las precisiones de D y β para obtener h con un error estándar $\hat{\sigma}_h = \pm 5 \text{ mm}$? Considérese $D = 100 \text{ m}$ y $\beta = 10^\circ$.



figura

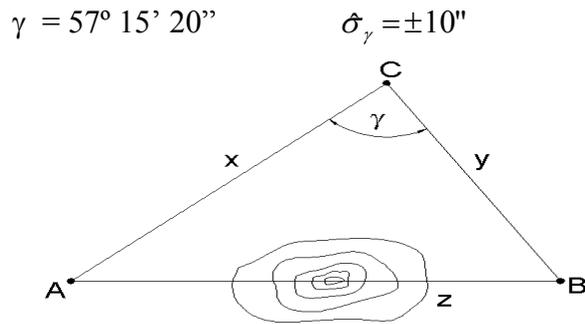
E 10: Durante la medición de ángulos desde la estación P , debe establecerse una estación excéntrica A' debido a la falta de intervisibilidad entre los puntos P y A . Debe calcularse una corrección excéntrica ϵ a los efectos de reducir la dirección horizontal PA' a la dirección requerida PA . Para calcular ϵ , debe conocerse los parámetros: e , D y ω (ver figura). ¿Cuál debe ser la precisión de dichos parámetros si la tolerancia para ϵ es $3\hat{\sigma}_\epsilon = \pm 3''$ y los valores aproximados de los parámetros son $e = 10 \text{ m}$, $D = 1000 \text{ m}$ y $\omega = 45^\circ$?



figura

E 11: Se desea determinar la distancia Z entre los puntos A y B de la figura y su error estándar $\hat{\sigma}_Z$. Se han medido las distancias X , Y y el ángulo γ con los siguientes resultados y errores estándar:

$$\begin{aligned} X &= 253.52 \text{ m} & \hat{\sigma}_X &= \pm 0.021 \text{ m} \\ Y &= 289.31 \text{ m} & \hat{\sigma}_Y &= \pm 0.027 \text{ m} \end{aligned}$$



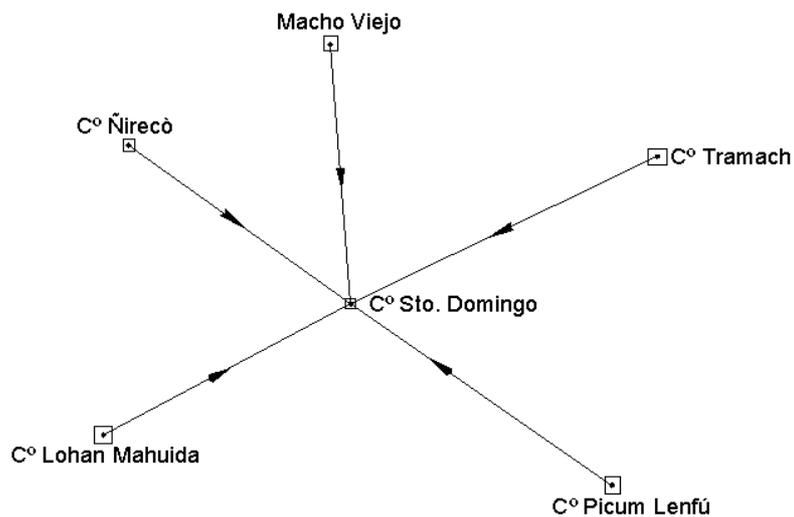
figura

Determinar Z y su error estándar σ_z . Si se fija el error estándar de Z en $\sigma_z \leq 0.01m$ ¿con que precisión deberá medirse X, Y, γ ?

E12: Un ángulo α ha sido determinado mediante la medición de las direcciones horizontales x_1, x_2 . Teniendo ambas mediciones el mismo peso: $p_1 = p_2 = 1$ ¿Cuál es el peso del ángulo? Si el peso del ángulo es $p_{\alpha} = \frac{1}{2}$ ¿Cuál es el peso de una dirección horizontal?

E 13: ¿Cuál es el peso de la expresión $x_i \sqrt{p_i}$ (p_i es el peso de x_i) si x_i tiene error estándar σ_i ?

E 14: En una campaña geodésica se efectuaron desde los puntos 1, 2, 3, 4 y 5, las mediciones de las distancias cenitales al punto trigonométrico 6 a fin de determinar su cota (ver figura)



figura

Del cálculo correspondiente, resultaron los datos presentados en la siguiente tabla:

est.	largo visual (m)	cota est.(m)	desnivel (m)	cota 6 (m)
1(MV)	15290.7	1491.47	93.63	1585.10
2(C°T)	25334.8	1107.77	477.67	1585.44
3(C°PL)	24684.4	1352.20	213.82	1586.32

4(C°LM)	12971.2	1989.56	-405.16	1584.40
5(C°Ñ)	18724.0	1750.66	-166.27	1584.39

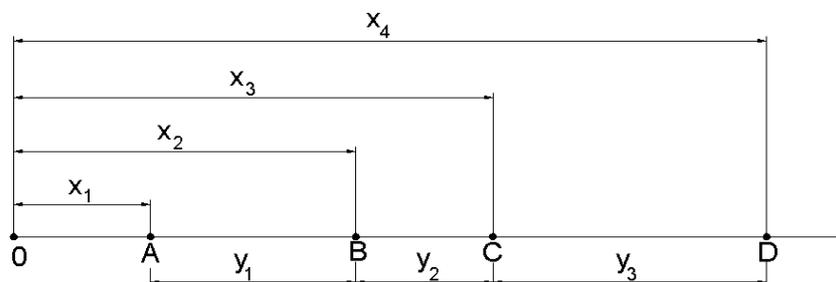
Hallar la cota estimada del punto 6 y su error estándar. El peso de un desnivel trigonométrico es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (largo visual) expresado en km. Justifiquelo.

E 15: Nivelación geométrica compuesta ida y vuelta. Dada la siguiente tabla:

tramo	li (km)	x_i (m) (ida)	x'_i (m)(vuelte.)	$\bar{x}(m)$ (media)	di (mm)
1-2	0.270	3.372	3.369		
2-3	0.310	2.025	2.026		
3-4	0.290	4.585	4.588		
4-5	0.330	5.118	5.116		
5-6	0.250	2.962	2.960		

- i) Hallar el error estándar de un desnivel simple.
- ii) Hallar el error estándar de un desnivel doble.
- iii) Hallar el error estándar propagado al desnivel h entre 1 y 6.
- iv) Hallar el desnivel h entre 1 y 6 y un intervalo de confianza del 95% para el desnivel verdadero.

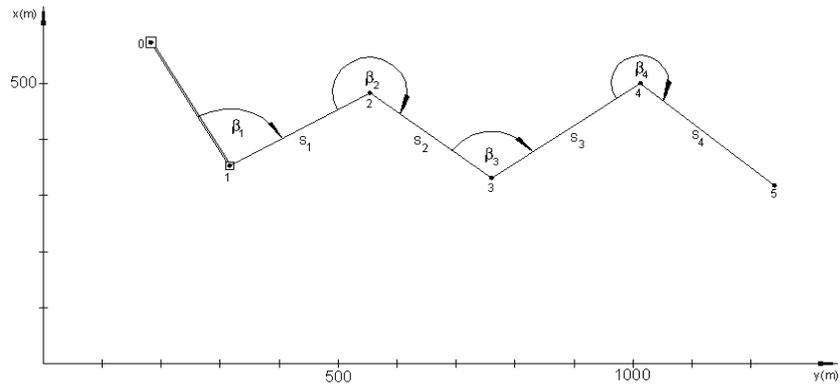
E 16: Desde la estación O, se han medido las distancias $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OC = x_3$, $OD = x_4$, alineadas en la misma dirección (ver figura), con un distanciómetro cuya precisión estándar es: $\sigma = 5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm D (mm)}$.



figura

Si $x_1 = 250.273 \text{ m}$, $x_2 = 721.851 \text{ m}$, $x_3 = 1322.031 \text{ m}$ y $x_4 = 2021.533 \text{ m}$, determinar los errores estándar y las distancias $y_1 = AB$, $y_2 = BC$, $y_3 = CD$, sus covarianzas y sus coeficientes de correlación. Hallar la distancia CD y su error estándar.

E17: Sea la poligonal de la figura.



figura

Se desea estimar el error σ_p del vértice 5.

Las coordenadas de los puntos de apoyo 0 y 1, son:

$$\begin{array}{ll} 0: & X_0 = 699.821 \text{ m} \quad Y_0 = 57.542 \text{ m} \\ 1: & X_1 = 148.037 \text{ m} \quad Y_1 = 221.253 \text{ m} \end{array}$$

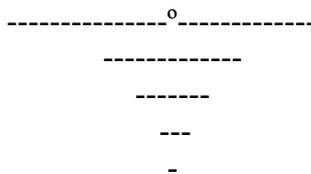
Los errores estándar de dichas coordenadas son:

$$\sigma_{X0} = \sigma_{X1} = 0.007 \text{ m} \quad \sigma_{Y0} = \sigma_{Y1} = 0.008 \text{ m}$$

El error estándar del rumbo R_{01} , es $\sigma_{R01} = 2''$

El error estándar de un ángulo se estima en $\hat{\sigma}_\beta = \pm 5''$ y el error estándar de una distancia se estima en $\hat{\sigma}_s = \pm 0.005 \text{ m}$.

E 18: En la poligonal del ejercicio 17, se desea que el punto 5 tenga un error total $\hat{\sigma}_p \leq 2.5 \text{ cm}$ ¿Cuáles deben ser los errores angular $\hat{\sigma}_\beta$ y en distancia $\hat{\sigma}_s$? Indique el instrumento apropiado para medir la poligonal.



TEMA 2
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
INCONSISTENTES

Sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes:

El ajuste o compensación de una red topográfica requiere de la solución de un sistema de ecuaciones lineales inconsistentes. Comenzaremos con el estudio de tales sistemas, partiendo de un ejemplo sencillo:

Ejemplo 1: Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 3 \\5x_1 + 3x_2 &= 3 \\4x_1 + 6x_2 &= 4\end{aligned}$$

expresado en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$A X = L \tag{1}$$

Otra forma de expresar (1), es la siguiente:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

donde:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

son los columnas de la matriz A y $L = [3 \ 3 \ 4]^T$ es el vector de los términos independientes. Si la solución existe, existirán entonces los números reales (escalares) x_1 y x_2 tales que:

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} = L$$

es decir, L puede expresarse como una combinación lineal de los vectores columna $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ con los escalares x_1 y x_2 . Trataremos de hallar la solución del sistema lineal mediante la eliminación gaussiana:

paso 1	paso 2	paso 3
1 2 3	1 2 3	1 2 3
5 3 3 →	0 -7 -12 →	0 -7 -12
4 6 4	0 -2 -8	0 0 $-\frac{32}{7}$

El sistema triangular equivalente es:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &= 3 \\
 7x_2 &= 12 \\
 0 &= -\frac{32}{7}
 \end{aligned}$$

La última ecuación es un absurdo, luego el sistema dado no admite solución. Se dice pues, que el sistema lineal es inconsistente. Las matrices A y A* (la matriz ampliada) son, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

El paso 3 de la eliminación gaussiana indica claramente que el rango de la matriz A es igual a 2, $\mathfrak{R}(A) = 2$, mientras que el rango de A* es igual a 3, $\mathfrak{R}(A^*) = 3$. Es bien sabido que si $\mathfrak{R}(A) \neq \mathfrak{R}(A^*)$, el sistema lineal no admite solución; es decir, resulta inconsistente. No existen pues los escalares x_1 , y x_2 , tal que L pueda expresarse como una combinación lineal de los vectores columnas de la matriz A, $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$. Interpretaremos este resultado gráficamente:

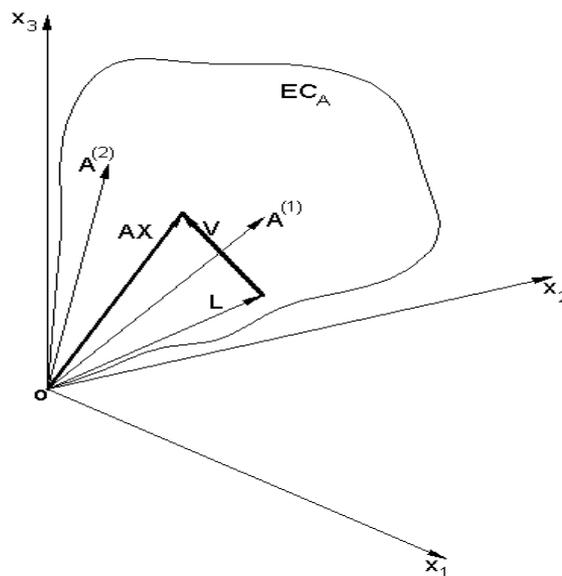


figura 1

Los vectores columna $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ generan un plano denominado el espacio columna de la matriz A y denotado por EC_A , que contiene todas las posibles combinaciones lineales de los vectores columna; es decir:

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} \in EC_A$$

Puesto que L no es una combinación lineal de $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ ($x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} \neq L$) no pertenece al espacio columna de A ($L \notin EC_A$). Debemos entonces sumar a L un vector V , vector corrección, tal que $L + V$ pertenezca a EC_A ; es decir:

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} = L + V$$

o bien:

$$AX = L + V \quad (2)$$

donde: $X = [x_1 \ x_2]^T$ es el vector solución. Ahora el sistema lineal (2) resulta consistente (admite solución) puesto que $L + V \in EC_A$. De entre todos los posibles vectores corrección V , escogeremos aquel cuyo módulo sea mínimo; es decir aquel que minimice la distancia entre el extremo del vector L y el espacio columna de la matriz A . En otras palabras el vector V seleccionado debe ser perpendicular al espacio columna EC_A :

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \rightarrow \|V\|^2 = V^T V = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 = \text{mínimo}$$

El vector corrección cumple con el principio de los mínimos cuadrados de Gauss.

Hallaremos ahora la ecuación del espacio columna de la matriz A , es decir, la ecuación del plano EC_A :

Sean $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ todos los vectores de \mathbb{R}^3 pertenecientes a EC_A ; es decir, todas las combinaciones lineales de $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$:

$$EC_A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ tal que : } \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu &= x_1 \\ 5\lambda + 3\mu &= x_2 \\ 4\lambda + 6\mu &= x_3 \end{aligned}$$

De la primera ecuación despejamos λ : $\lambda = x_1 - 2\mu$ y reemplazamos en las segunda y tercera ecuaciones:

$$\begin{aligned}5(x_1 - 2\mu) + 3\mu &= x_2 \\4(x_1 - 2\mu) + 6\mu &= x_3\end{aligned}$$

Operando, se llega a:

$$\begin{aligned}14\mu &= -2x_2 + 10x_1 \\14\mu &= -7x_3 + 28x_1\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro la primera de la segunda:

$$18x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0$$

y se tiene la ecuación del espacio columna de la matriz A, EC_A . También se llega al mismo resultado mediante la eliminación gaussiana (¡inténtelo!). Obsérvese que $L = [3, 3, 4]^T$ no pertenece al EC_A puesto que sus componentes no satisfacen la ecuación del plano EC_A , entonces el sistema lineal resulta inconsistente. Sin embargo, hallaremos una solución $X = [x_1 \ x_2]^T$ que resulta de la aplicación del principio de los mínimos cuadrados. Tal solución se denomina “la solución mínimos cuadrados”.

Resulta ahora que $AX \in EC_A$ y $V \perp EC_A$, entonces el producto escalar de los vectores AX y V debe ser igual a cero; es decir:

$$(AX)^T V = 0 \tag{3}$$

Reemplazando $V = AX - L$ en la (3):

$$\begin{aligned}(AX)^T (AX - L) &= 0 \\X^T A^T (AX - L) &= 0 \\X^T A^T AX - X^T A^T L &= 0 \\X^T (A^T AX - A^T L) &= 0\end{aligned}$$

Dado que X es distinto del vector nulo, $X \neq \mathbf{0}$, debe cumplirse:

$$\begin{aligned}A^T AX - A^T L &= \mathbf{0} \\A^T AX &= A^T L\end{aligned} \tag{4}$$

La (4) es el sistema de las ecuaciones normales, donde:

$$N = A^T A \tag{5}$$

es la matriz normal y es una matriz simétrica (¡demuéstrela!).

La solución mínimos cuadrados se obtiene de la (4) por inversión matricial:

$$X = N^{-1} A^T L \tag{6}$$

Para el ejemplo 1, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow N = A^T A = \begin{bmatrix} 42 & 41 \\ 41 & 49 \end{bmatrix}; A^T L = \begin{bmatrix} 34 \\ 39 \end{bmatrix}$$

$$\det(N) = 377; \text{adj}(N) = \begin{bmatrix} 49 & -41 \\ -41 & 42 \end{bmatrix}; N^{-1} = \frac{1}{377} \begin{bmatrix} 49 & -41 \\ -41 & 42 \end{bmatrix}$$

La solución mínimos cuadrados es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = N^{-1} A^T L = \frac{1}{377} \begin{bmatrix} 49 & -41 \\ -41 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.177719 \\ 0.647215 \end{bmatrix}$$

El vector corrección V, es:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = AX - L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.177719 \\ 0.647215 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.52780 \\ -0.16976 \\ 0.59417 \end{bmatrix}$$

El módulo o norma del vector corrección V, es:

$$\|V\| = \sqrt{V^T V} = \sqrt{2.716293} = 1.64804$$

La proyección ortogonal del vector de términos independientes L sobre EC_A es:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.177719 \\ 0.647215 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.472149 \\ 2.830240 \\ 4.594166 \end{bmatrix}$$

Justificaremos este resultado por otro camino:

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el extremo del vector V y es ortogonal a EC_A , es:

$$X = L + \lambda n \quad (7)$$

donde $n = [18, 2, -7]^T$ es un vector normal a EC_A que surge de su propia ecuación.

La ecuación vectorial de EC_A es:

$$n^T X = 0 \quad (8)$$

Llamemos X_p al vector proyección de L sobre EC_A , entonces:

$$X_p = L + \lambda n \quad (9)$$

$$n^T X_p = 0 \quad (10)$$

Reemplazando (9) en (10):

$$n^T (L + \lambda n) = 0$$

$$n^T L + \lambda n^T n = 0$$

$$\lambda n^T n = -n^T L$$

$$\lambda = -\frac{n^T L}{n^T n} \quad (11)$$

Entonces:

$$\lambda = -\frac{\begin{bmatrix} 18 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 18 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}} = -\frac{32}{377}$$

El vector proyección es:

$$X_p = L + \lambda n = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{32}{377} \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.472150 \\ 2.830239 \\ 4.594164 \end{bmatrix}$$

El vector proyección es $X_p = AX$ si y solamente si la solución $X = [x_1 \ x_2]^T$ es la solución mínimos cuadrados.

Vale la pena destacar que si la matriz A es de rango completo; es decir, el rango de A es igual al número de columnas de A, la solución mínimos cuadrados es única. En el siguiente ejemplo discutiremos que sucede cuando la matriz A es deficiente de rango, vale decir: $\mathfrak{R}(A) < m$, donde m es el número de columnas de la matriz A.

Ejemplo 2: Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$3x_1 + 6x_2 = 8$$

expresado matricialmente es:

$$AX = L \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por eliminación gaussiana:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & \rightarrow & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 8 & & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

El sistema triangular equivalente es:

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 0 = -3 \\ 0 = -4 \end{array}$$

El sistema es inconsistente. El rango de la matriz A es $\mathfrak{R}(A) = 1$; el número de columnas es $m = 2$. El defecto de rango de la matriz A es $r = m - \mathfrak{R}(A) = 2 - 1 = 1$.

El sistema de las ecuaciones normales es:

$$(A^T A)X = A^T L \rightarrow \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 76 \end{bmatrix}$$

El determinante de N es $\det(N) = |N| = |A^T A| = 0 \rightarrow \mathfrak{R}(A^T A) = \mathfrak{R}(N) = 1$. Entonces los rangos de A y N son iguales, la matriz normal también es defectuosa de rango y $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(N) = 1$. Existen entonces infinitas soluciones mínimos cuadrados. La expresión de la solución general se obtiene por eliminación gaussiana.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 28 & 38 & 14 & 28 & 38 \\ 28 & 56 & 76 & \rightarrow & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

El sistema triangular equivalente es:

$$14x_1 + 28x_2 = 38$$

es decir:
$$x_1 + 2x_2 = \frac{19}{7} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{19}{7} - 2x_2$$

La solución general mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{7} - 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad -\infty < x_2 < +\infty$$

donde $\begin{bmatrix} \frac{19}{7} & 0 \end{bmatrix}^T$ es una solución particular del sistema de las ecuaciones normales que denotamos por F, mientras que $\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ es una solución del sistema homogéneo

asociado que denotamos por N_1 ; entonces podemos expresar la solución general mínimos cuadrados por:

$$X = F + \lambda N_1; \quad -\infty < \lambda < +\infty \quad (12)$$

Hallaremos ahora dos soluciones, por ejemplo, para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Solución particular para $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7143 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector corrección V es:

$$V = AX - L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7143 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2857 \\ 0.4286 \\ 0.1429 \end{bmatrix} \rightarrow V^T V = 1.8571; X^T X = 7.3674$$

Solución particular para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7143 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector corrección V es:

$$V = AX - L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 36 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7143 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2857 \\ 0.4286 \\ 0.1429 \end{bmatrix} \rightarrow V^T V = 1.8571; X^T X = 1.5102$$

Decimos que la solución particular para $\lambda = 1$ es “mejor” que la solución particular para $\lambda = 0$, puesto que su norma $\sqrt{X^T X} = \sqrt{1.5102} = 1.289$ es menor que la norma de la solución particular para $\lambda = 0$, $\sqrt{X^T X} = \sqrt{7.3674} = 2.7143$.

¿Cuál es entonces la “mejor” solución o solución óptima?

Si todas las soluciones son mínimos cuadrados ($V^T V = \text{mínimo}$), la solución óptima será aquella que tenga norma mínima; es decir: $\sqrt{X^T X} = \text{mínimo}$.

Interpretación geométrica: La solución general mínimos cuadrados, (12), del sistema lineal dado, es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $F = (19/7, 0)$ y está dirigida por el vector $N_1 = (-2, 1)$ según ilustra la figura 2:

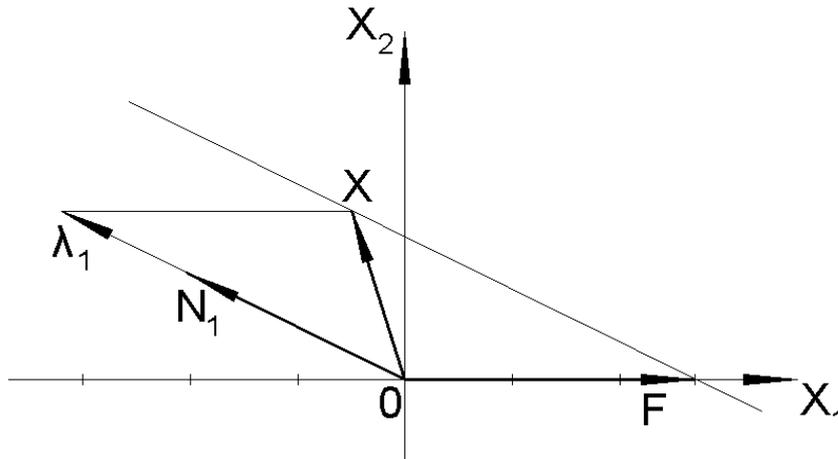


figura 2

En la figura 2, denotamos por X a todos los vectores solución mínimos cuadrados, mientras que \hat{X} representa la solución óptima (mínima norma). Obsérvese que la solución óptima es aquella que resulta perpendicular al vector N_1 ; es decir que debe cumplir con la condición de ortogonalidad:

$$N_1^T \hat{X} = 0 \quad (13)$$

De la (12), la solución óptima es $\hat{X} = F + \lambda N_1$. Para hallar el valor de λ que satisfaga a (13), multiplicamos escalarmente ambos miembros de la anterior por N_1^T :

$$N_1^T \hat{X} = N_1^T F + \lambda N_1^T N_1$$

de la (13):

$$N_1^T F + \lambda N_1^T N_1 = 0$$

entonces :

$$\lambda = -\frac{N_1^T F}{N_1^T N_1}$$

Reemplazando los valores numéricos:

$$\lambda = -\frac{N_1^T F}{N_1^T N_1} = -\frac{\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}} = -\frac{-38}{5} = \frac{38}{5} = 1.0857$$

Entonces la solución óptima es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Aplicamos la eliminación gaussiana a la matriz A ampliada con el vector de términos independientes L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Las filas 3° a 6° de la matriz ampliada son dependientes, pero cualquiera de ellas es independiente de las 1° y 2°, entonces el rango de la matriz ampliada es igual a 3. Puesto que el rango de A es 2, el vector $L = [6, 1, 3, -2, 1, 5]^T$ no pertenece al espacio columna de A; luego, el sistema lineal dado es inconsistente.

El sistema de las ecuaciones normales $(A^T A) X = A^T L$ es:

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 8 \\ 5 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix}$$

donde $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(A^T A) = 2 \rightarrow$ existen infinitas soluciones mínimos cuadrados..

Aplicamos la eliminación gaussiana para hallar la solución mínimos cuadrados general:

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 8 \\ 5 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 8 \\ & 3.875 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 7.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema triangular equivalente es:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 8x_4 &= 22 \\ 3.875x_2 &= 7.25 \end{aligned}$$

Adoptamos x_3, x_4 como variables libres:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.58064 - x_4 \\ x_2 &= 1.87097 \end{aligned}$$

La solución general mínimos cuadrados es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.58064 & & & -x_4 \\ 1.87097 & & & \\ & x_3 & & \\ & & & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.58064 \\ 1.87097 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $F = [1.58064, 1.87097, 0, 0]^T$, $N_1 = [0, 0, 1, 0]^T$, $N_2 = [-1, 0, 0, 1]^T$

Claramente se ve que $(A^T A) N_1 = \mathbf{0}$, $(A^T A) N_2 = \mathbf{0}$ y $(A^T A) F = A^T L$

La solución óptima \hat{X} se determina estableciendo las siguientes condiciones:

$$\text{i) } \hat{X} = F + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2; \quad \text{ii) } N_1^T \hat{X} = 0; \quad \text{iii) } N_2^T \hat{X} = 0$$

De las anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} (N_1^T N_1) \lambda_1 + (N_1^T N_2) \lambda_2 &= -N_1^T F \\ (N_2^T N_1) \lambda_1 + (N_2^T N_2) \lambda_2 &= -N_2^T F \end{aligned}$$

$$N_1^T N_1 = 1; N_1^T N_2 = N_2^T N_1 = 0; N_2^T N_2 = 2; N_1^T F = 0; N_2^T F = -1.58064$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 0 \lambda_2 &= 0 \\ 0 \lambda_1 + 2 \lambda_2 &= 1.58064 \end{aligned}$$

La solución es: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0.79032$.

De la condición i), la solución óptima del sistema lineal inconsistente, es:

$$X_F = \begin{bmatrix} 1.58064 \\ 1.87097 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.79032 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.79032 \\ 1.87097 \\ 0.00000 \\ 0.79032 \end{bmatrix} \rightarrow \|X\| = \sqrt{X^T X} = 2.1795 = \text{mínimo}$$

El vector corrección $V = A X - L$ es:

$$V = \begin{bmatrix} -0.9678 \\ 0.5806 \\ 0.4516 \\ 0.1290 \\ 0.5806 \\ 0.3226 \end{bmatrix} \rightarrow \|V\| = \sqrt{V^T V} = 1.3912 = \text{mínimo}$$

Cualquier par de escalares distintos de $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0.79032$ reemplazados en la condición i), dará una solución mínimos cuadrados cuya longitud será mayor que la longitud de \hat{X} .

Este método, si bien tiene valor teórico, no resulta práctico para resolver sistemas lineales inconsistentes de tamaño considerable. La solución óptima se halla mediante la aplicación de una “regla práctica” que se verá en la sección siguiente.

Inversión de matrices simétricas:

Según la expresión (6) de la sección anterior, la solución mínimos cuadrados requiere de la inversión de la matriz normal que es simétrica. Los valores y vectores propios de la matriz normal nos permiten hallar tanto la matriz inversa regular de Cayley cuando la matriz N es de rango completo, como la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose cuando N es defectuosa de rango.

Dada, en general, una matriz A de orden $m \times m$, se definen como un valor propio de A al escalar λ y su vector propio correspondiente al vector X , si se cumple:

$$AX = \lambda X \quad (17)$$

Para hallar los valores propios y los correspondientes vectores propios de la matriz A , se procede como sigue:

$AX - \lambda X = 0$, donde 0 es el vector nulo de orden $m \times 1$. Sea I la matriz identidad de orden $m \times m$: $AX - \lambda IX = 0$, entonces:

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (18)$$

La (18) es un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con m incógnitas. Para que tenga soluciones distintas de la solución trivial ($X \neq 0$), deberá cumplirse que el determinante de la matriz $A - \lambda I$ sea igual a cero; es decir:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (19)$$

La (19) se denomina la ecuación característica de la matriz A y es un polinomio de grado m en λ . A cada valor propio λ_j , $j = 1, m$ le corresponde un vector propio X_j , $j = 1, m$ que se obtiene como solución del sistema homogéneo (18) luego de reemplazar el correspondiente λ_j , que es una solución de (19).
Sea como ejemplo la matriz de orden 2×2 , siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \end{aligned}$$

donde el coeficiente de λ es la traza de A y el término independiente es el determinante de A ; luego, la ecuación característica de la matriz $A_{2 \times 2}$, es:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad (20)$$

cuya solución son los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz A .

Los vectores propios correspondientes se obtienen resolviendo los siguientes sistemas lineales homogéneos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_j & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad j = 1, 2$$

Nos interesa especialmente el caso de las matrices simétricas, puesto que la matriz normal lo es.

Si, en general, $A_{m \times m}$ es simétrica y X_i, X_j son vectores propios correspondientes a valores propios distintos λ_i y λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$), entonces " X_i y X_j son ortogonales ($X_i \perp X_j$)".

Puesto que λ_i es un valor propio de la matriz A y X_i es un vector propio correspondiente:

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad (21)$$

transponiendo:

$$X_i^T A^T = \lambda_i X_i^T$$

multiplicando escalarmente por X_j :

$$X_i^T A^T X_j = \lambda_i X_i^T X_j \quad (22)$$

Puesto que λ_j es un valor propio de la matriz A y X_j es un vector propio correspondiente:

$$AX_j = \lambda_j X_j$$

Puesto que A es simétrica: $A^T X_j = \lambda_j X_j$

Reemplazando en (22): $X_i^T \lambda_j X_j = \lambda_i X_i^T X_j \rightarrow \lambda_j X_i^T X_j = \lambda_i X_i^T X_j$

$$\lambda_j X_i^T X_j - \lambda_i X_i^T X_j = 0 \rightarrow (\lambda_j - \lambda_i) X_i^T X_j = 0$$

Puesto que $\lambda_i \neq \lambda_j$, resulta que $X_i^T X_j = 0$, entonces X_i y X_j son ortogonales, dado que $X_i \neq 0$ y $X_j \neq 0$. Los vectores propios de una matriz simétrica son ortogonales: $X_i \perp X_j$ $i = 1, m; j = 1, m$ $i \neq j$.

Otra propiedad importante es la siguiente: "Los valores propios de una matriz simétrica son números reales mayores o iguales a cero"

Si A es una matriz simétrica de orden $m \times m$, podemos expresarla como $A = B^T B$ donde B es de orden $n \times m$ ($n \geq m$). Sea λ_j un valor propio de la matriz A y X_j un vector propio correspondiente, entonces:

$$\begin{aligned} AX_j &= \lambda_j X_j \\ B^T B X_j &= \lambda_j X_j \end{aligned} \quad (23)$$

Premultiplicando ambos miembros de (23) por X_j^T :

$$X_j^T B^T B X_j = \lambda_j X_j^T X_j \rightarrow (B X_j)^T B X_j = \lambda_j X_j^T X_j \rightarrow \|B X_j\|^2 = \lambda_j \|X_j\|^2$$

entonces:
$$\lambda_j = \frac{\|B X_j\|^2}{\|X_j\|^2} \geq 0 \quad j = 1, m$$

A las dos importantes propiedades ya vistas:

- i) Todos los valores propios de una matriz simétrica son números reales y positivos ($\lambda_j \geq 0; j = 1, m$)
- ii) Los vectores propios son mutuamente ortogonales ($X_i \perp X_j, i = 1, m; j = 1, m$ $i \neq j$).

podemos agregar otras no menos importantes:

- iii) Puede haber soluciones múltiples en la ecuación característica.
- iv) El número de valores propios iguales a cero, es igual al defecto de rango de la matriz A.
- v) El determinante de la matriz A esta dada por: $|A| = \prod \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m$

Si llamamos r al número de valores propios nulos:

$$r = m - \mathfrak{R}(A) = \text{defecto de rango de la matriz A}$$

donde r es también el defecto de rango de la matriz A.

Ejemplo4: Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, hallar sus valores propios y los vectores propios correspondientes.

La ecuación característica: $\det(A) = \lambda^2 - 5\lambda + 0 = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$
valores propios: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$

vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 5$:

$$(A - \lambda_1 I)X = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 - \lambda_1 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema homogéneo por eliminación gaussiana:

el sistema triangular equivalente

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ \end{matrix}$$

variable libre o independiente: $x_2 \rightarrow x_1 = 2x_2$

La solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad -\infty < x_2 < +\infty$$

haciendo, por ejemplo, $x_2 = 1$, se tiene un vector propio $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 5$.

vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda_2 = 0$:

$$(A - \lambda_2 I)X = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 - \lambda_2 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema homogéneo por eliminación gaussiana:

el sistema triangular equivalente

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ \end{matrix}$$

variable libre o independiente: $x_2 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

La solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad -\infty < x_2 < +\infty$$

haciendo, por ejemplo, $x_2 = 2$, se tiene un vector propio $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 0$.

Los vectores propios X_1 y X_2 son ortogonales: $X_1^T X_2 = [2 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow X_1 \perp X_2$

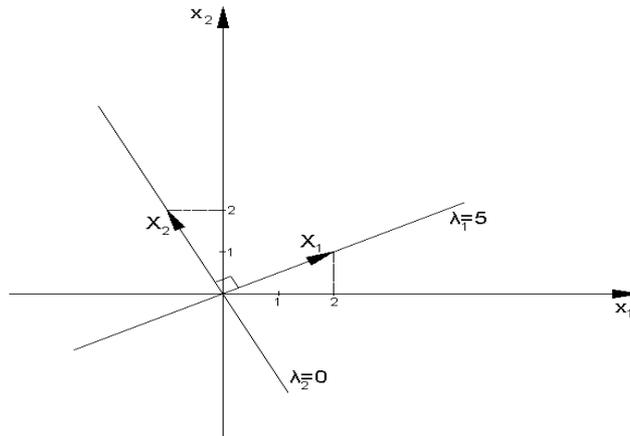


figura 3

El determinante de la matriz A es igual a cero: $|A| = 5 \cdot 0 = 0$.

El rango de la matriz A es: $\mathfrak{R}(A) = 1$, el orden de A es $m \times m = 2 \times 2$, el defecto de rango de A es: $r = m - \mathfrak{R}(A) = 2 - 1 = 1 =$ número de valores propios nulos.

Los vectores propios normalizados de una matriz simétrica $A_{m \times m}$, son:

$$e_j = \frac{X_j}{\|X_j\|} ; \quad \|e_j\| = 1 \quad j = 1, m \quad (24)$$

con ellos se construye la matriz $E_{m \times m}$:

$$E = [e_1, e_2, \dots, e_m]$$

donde

$$e_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

luego E es una matriz ortogonal; es decir:

$$E^{-1} = E^T \quad (25)$$

Consideremos nuevamente una matriz simétrica $A_{m \times m}$ y la respectiva matriz E , cuyas columnas son los vectores propios normalizados de la matriz simétrica A . El producto de ambas matrices se expresa por:

$$A E = [A \tilde{e}_1, A \tilde{e}_2, \dots, A \tilde{e}_m] = [\lambda_1 \tilde{e}_1, \lambda_2 \tilde{e}_2, \dots, \lambda_m \tilde{e}_m] = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

es decir:

$$A E = E D \quad (26)$$

D es una matriz diagonal, donde los valores propios de A ($\lambda_j, j = 1, m$) son sus elementos diagonales.

Premultiplicando la (26) por E^T y considerando que E es una matriz ortogonal ($E^{-1} = E^T$):

$$\begin{aligned} E^T A E &= E^T E D = E^{-1} E D = D \\ E^T A E &= D \end{aligned} \quad (27)$$

Premultiplicando ambos miembros de la (27) por E :

$$\begin{aligned} E E^T A E &= E D \\ A E &= E D \\ A E E^T &= E D E^T \\ A &= E D E^T \end{aligned} \quad (28)$$

Invirtiendo ambos miembros de la (28):

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (E D E^T)^{-1} \\ A^{-1} &= (E^T)^{-1} D^{-1} E^{-1} \\ A^{-1} &= (E^{-1})^{-1} D^{-1} E^{-1} \\ A^{-1} &= E D^{-1} E^T \end{aligned} \quad (29)$$

Si A es no singular ($|A| \neq 0$), todos sus valores propios son distintos de cero y existe la matriz inversa D^{-1} . Entonces, la (29) es la inversa regular de Cayley:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = E D^{-1} E^T \quad (30)$$

Si A es una matriz simétrica singular su determinante es igual a cero ($|A| = 0$), resulta entonces defectuosa de rango, $\mathfrak{R}(A) < m$, y presenta tantos valores propios nulos como su defecto de rango ($r = m - \mathfrak{R}(A)$). No existe pues D^{-1} , la inversa de la matriz D . Si removemos los valores propios nulos de la diagonal de D y al mismo tiempo

removemos los vectores propios normalizados correspondientes de la matriz E, la expresión.

$$A^+ = E D^{-1} E^T \quad (31)$$

es la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose que permite resolver el sistema de las ecuaciones normales cuando la matriz normal $N = A^T A$ es deficiente de rango y por tanto, singular. De las infinitas soluciones mínimos-cuadrados, la pseudoinversa M-P permite obtener la solución óptima; es decir, la solución de norma mínima. Entonces la solución óptima:

$$\hat{X} = (A^T A)^+ A^T L = N^+ A^T L \quad (32)$$

cumple con la doble condición:

- i) $V^T V = \text{mínimo}$
- ii) $X^T X = \text{mínimo}$

A modo de aplicación, resolveremos el ejemplo (3), utilizando la pseudoinversa M-P (Moore-Penrose):

La matriz normal N:

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 & 8 \\ 5 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\det(N - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 5 & 0 & 8 \\ 5 & 7 - \lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 23\lambda^3 + 62\lambda^2 = 0$$

cuyas raíces son: $\lambda_1 = 19.88153$; $\lambda_2 = 3.11847$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

El defecto de rango de la matriz normal N es igual al número de valores propios nulos; es decir, dos y $\mathfrak{R}(N) = 4 - 2 = 2$.

Vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 19.88153$:

Aplicamos eliminación gaussiana para resolver el sistema lineal homogéneo correspondiente:

$$\begin{bmatrix} -11.88153 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & -12.88153 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -19.88153 & 0 & 0 \\ 8 & 58 & 0 & -11.88153 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -11.88153 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -10.77742 & 0 & 8.36657 & 0 \\ 0 & 0 & -19.88153 & 0 & 0 \\ 0 & 8.366657 & 0 & -6.49502 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -11.88153 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -10.77742 & 0 & 8.36657 & 0 \\ 0 & 0 & -19.88153 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

El sistema triangular equivalente es:

$$\begin{aligned} -11.88153 x_1 + 5 x_2 + 8 x_4 &= 0 \\ -10.77742 x_2 + 8.36657 x_4 &= 0 \\ -10.88153 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Adoptamos x_4 como la variable libre:

$$x_3 = 0; \quad x_2 = 0.77630 x_4; \quad x_1 = 1.00003 x_4.$$

La solución general del sistema homogéneo es:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.00003 x_4 \\ 0.77630 x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 1.00003 \\ 0.77630 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector propio normalizado es: $e_1 = [0.61987 \quad 0.48119 \quad 0 \quad 0.61985]^T$

Para el valor propio $\lambda_2 = 3.11847$, se tiene:
 $e_2 = [0.342026 \quad -0.876610 \quad 0 \quad 0.340260]^T$

Las matrices E y D, luego de remover los valores propios nulos y sus correspondientes vectores propios normalizados, son:

$$E = [\tilde{e}_1 \quad \tilde{e}_2] = \begin{bmatrix} 0.61987 & 0.342026 \\ 0.48119 & -0.876610 \\ 0 & 0 \\ 0.61985 & 0.340260 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.88153 & 0 \\ 0 & 3.11847 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa D^{-1} es:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05030 & 0 \\ 0 & 0.032067 \end{bmatrix}$$

El vector de los términos independientes en el sistema de las ecuaciones normales es:

$$A^T L = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \\ 0 \\ 22 \end{bmatrix}$$

La pseudoinversa M-P (Moore-Penrose), es:

$$N^+ = E D^{-1} E^T = \begin{bmatrix} 0.05645 & -0.08064 & 0 & 0.05645 \\ -0.08064 & 0.25806 & 0 & -0.08064 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05645 & -0.08065 & 0 & 0.05645 \end{bmatrix}$$

La solución óptima es:

$$\hat{X} = (A^T A)^+ A^T L = N^+ A^T L = \begin{bmatrix} 0.79036 \\ 1.87066 \\ 0 \\ 0.79036 \end{bmatrix}$$

Las diferencias con el resultado anterior se deben a errores de redondeo, solamente.

-----o-----

TRABAJO PRÁCTICO 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES INCONSISTENTES

E1: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & x_1 + 2x_2 = 3 \\ & 5x_1 + 3x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 6x_2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & x_1 + x_2 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 + x_2 = 2 \end{aligned}$$

usando la pseudoinversa M-P.

E2: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes:

$$\text{i)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

usar la aplicación MATLAB: SSI_RM.

E3: Plantee y resuelva sus propios sistemas lineales inconsistentes.

-----°-----

TEMA 3

ANALISIS DE REDES TOPOGRAFICAS

Las Redes Topográficas:

Las redes topográficas que vamos a estudiar en este curso son.

- i).- Redes Planas
- ii).- Redes Altimétricas

Redes Planas: La superficie de referencia de las redes planas es el plano topográfico. Consideraremos como observables a los ángulos horizontales y a las distancias reducidas a la superficie de referencia. Los parámetros a ajustar son las coordenadas planas (X_j, Y_j) $j = 1, p$ donde p es el número de vértices o puntos de la red. Existe una relación explícita entre observables y parámetros. Para los ángulos horizontales, figura 1, se tiene el ángulo β definido por los puntos I, K, J donde K es el punto estación desde el cual se bisectan los puntos I y J para obtener el ángulo β por diferencia de las direcciones horizontales KJ y KI observadas. Las coordenadas planas de los puntos I, K, J son (X_I, Y_I) , (X_K, Y_K) , (X_J, Y_J) respectivamente. El ángulo horizontal β es:

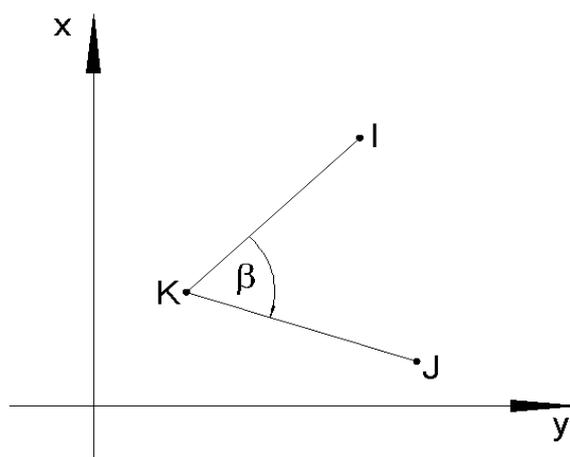


figura 1

$$\beta = \arctg \frac{Y_J - Y_K}{X_J - X_K} - \arctg \frac{Y_I - Y_K}{X_I - X_K} \quad (1)$$

o bien en forma sintética:

$$\beta = f_{\beta}(X_I, Y_I, X_J, Y_J, X_K, Y_K) \quad (2)$$

donde el observable β , es una función explícita de los parámetros o coordenadas planas. Para las distancias reducidas, figura 2, se tiene la distancia D definida por los puntos I, J.

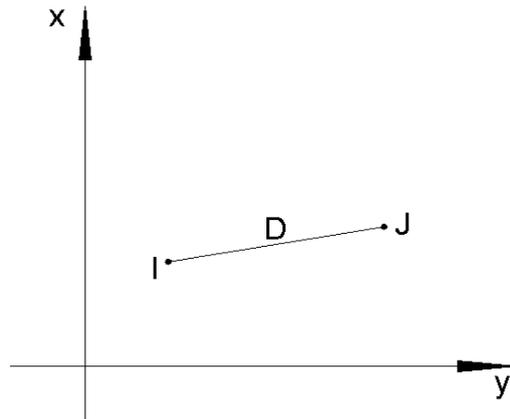


figura 2

La distancia D es entonces:

$$D = \sqrt{(X_J - X_I)^2 + (Y_J - Y_I)^2} \quad (3)$$

o bien en forma sintética:

$$D = f_D(X_I, Y_I, X_J, Y_J) \quad (4)$$

donde el observable D es una función explícita de los parámetros o coordenadas planas X, Y. Si l_i (ángulo o distancia) es la i-ésima observación ajustada, se tendrá entonces:

$$l_i = f_i(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_j, Y_j, \dots, X_p, Y_p) \quad (5)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_i \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X_1, Y_1, \dots, X_j, Y_j, \dots, X_p, Y_p) \\ f_2(X_1, Y_1, \dots, X_j, Y_j, \dots, X_p, Y_p) \\ \dots \\ f_i(X_1, Y_1, \dots, X_j, Y_j, \dots, X_p, Y_p) \\ \dots \\ f_n(X_1, Y_1, \dots, X_j, Y_j, \dots, X_p, Y_p) \end{bmatrix} \quad (6)$$

La (6) representa el sistema de las ecuaciones de observación. La i-ésima ecuación del sistema es:

$$f_i(X_1, Y_1, \dots, X_j, Y_j, \dots, X_p, Y_p) = l_i \quad (7)$$

donde X_j, Y_j ($j = 1, p$) son las coordenadas planas (o parámetros) ajustadas, mientras que l_i ($i = 1, n$) es la i-ésima observación ajustada. Tanto parámetros como observables son las incógnitas del problema. Para resolverlo partiremos de la siguiente consideración:

X_j^0, Y_j^0 son coordenadas planas aproximadas tales que, las coordenadas ajustadas (compensadas) se expresan por:

$$\begin{aligned} X_j &= X_j^0 + dX_j \\ Y_j &= Y_j^0 + dY_j \end{aligned} \quad j = 1, p \quad (8)$$

Llamamos v_i , corrección (o residuo) de la i -ésima observación l_i y l_{bi} al valor obtenido de la observación l_i , entonces la observación ajustada o compensada es:

$$l_i = l_{bi} + v_i \quad i = 1, n \quad (9)$$

Reemplazando (8) y (9) en (7), se obtiene la siguiente expresión (10):

$$f_i(X_1^0 + dX_1, Y_1^0 + dY_1, \dots, X_j^0 + dX_j, Y_j^0 + dY_j, \dots, X_p^0 + dX_p, Y_p^0 + dY_p) = l_{bi} + v_i \quad i = 1, n$$

Según (1) y (3), las f_i en la (7) no son funciones lineales. Un desarrollo en serie de Taylor alrededor de los valores aproximados X_j^0, Y_j^0 $j = 1, p$, y despreciando términos de mayor orden y grado, nos permite obtener una expresión linealizada para (7). Así, desarrollando en serie de Taylor:

$$f_i(\dots, X_j^0, Y_j^0, \dots) + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_0 dX_j + \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j} \right)_0 dY_j + \dots = l_{bi} + v_i \quad i = 1, n \quad (11)$$

donde: $f_i(\dots, X_j^0, Y_j^0, \dots) = l_i^0$ es un valor aproximado de la observación (ángulo o distancia) que se calcula reemplazando las coordenadas aproximadas X_j^0, Y_j^0 en (1) o (3) según corresponda. El subíndice "0" en las derivadas parciales de la (11) indica que una vez obtenidas dichas derivadas, debemos transformarlas en coeficientes numéricos mediante las coordenadas aproximadas X_j^0, Y_j^0 . La (11) adquiere entonces la siguiente forma:

$$\dots + \frac{\partial f_i}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial f_i}{\partial Y_j} dY_j + \dots = l_{bi} - l_i^0 + v_i \quad i = 1, n \quad j = 1, p \quad (12)$$

donde se ha obviado el subíndice "0" en las derivadas parciales para simplificar la notación. Haciendo variar i desde 1 hasta n , la (12) representa un sistema de ecuaciones lineales; es decir, el sistema de las ecuaciones de observación linealizado, donde las derivadas parciales, transformadas en coeficientes numéricos, las observaciones l_{bi} y los valores aproximados l_i^0 de las observaciones son conocidos, mientras que dx_j, dy_j y v_i son las incógnitas del problema. La ecuación (12) se denomina el modelo funcional. La representación matricial del modelo funcional es:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\partial f_i}{\partial X_j} & \frac{\partial f_i}{\partial Y_j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ dX_j \\ dY_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ l_{bi} - l_i^0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (13)$$

que puede ser escrita en forma sintética:

$$AX = L + V \quad (14)$$

donde $L_i = l_{bi} - l_i^0$ $i = 1, n$. La matriz A, denominada la matriz de diseño, es tal que sus elementos son las derivadas parciales de las funciones explícitas f_i respecto de las coordenadas o parámetros X_j, Y_j , evaluadas en las coordenadas aproximadas X_j^0, Y_j^0 . El vector de las incógnitas X, está formado por las correcciones diferenciales dX_j, dY_j a las coordenadas aproximadas. El vector V contiene las correcciones o residuos v_i . La matriz A es de orden $n \times m$ donde $m = 2p$ siendo en general, $n > m$. El vector L contiene a las observaciones l_{bi} y estas a su vez, están afectadas de los inevitables errores de observación (errores accidentales), en consecuencia, el vector L no pertenece al espacio columna de la matriz A, EC_A , generado por las columnas de A, resultando así inconsistente el sistema lineal $AX = L$. Es necesario pues, sumar el vector corrección V al vector L, de manera que V sea perpendicular al espacio columna de la matriz A, minimizando su módulo.

Llamemos L_b al vector de las observaciones:

$$L_b = \begin{bmatrix} l_{b1} \\ l_{b2} \\ \vdots \\ l_{bi} \\ \vdots \\ l_{bn} \end{bmatrix} \quad (15)$$

y sean σ_i los errores estándar de las observaciones. La matriz varianza –covarianza del vector L_b es:

$$\Sigma L_b = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sim} & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

La (16) es el modelo estocástico. En la mayoría de los casos las covarianzas σ_{ij} son nulas, en consecuencia la (16) es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal principal son las varianzas de las observaciones. La inversa de la (16) es la matriz de los pesos de las observaciones; es decir:

$$\Sigma L_b^{-1} = P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

Para resolver el sistema de las ecuaciones de observación linealizado (14) (el modelo funcional), es necesario recurrir al principio de los mínimos cuadrados. Puesto que las observaciones son de distinta precisión, dicho principio se expresa por:

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \text{mínimo} \quad (18)$$

Vectorialmente es:

$$V^T P V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \text{mínimo} \quad (19)$$

Despejando V de la (14): $V = AX - L$ y reemplazando en (19):

$$\begin{aligned} (AX - L)^T P (AX - L) &= \text{mínimo} \\ (X^T A^T - L^T) (PAX - PL) &= \text{mínimo} \end{aligned}$$

$$F(X) = X^T A^T PAX - X^T A^T PL - L^T PAX + L^T PL = \text{mínimo} \quad (20)$$

La condición de mínimo es $F'(X) = \mathbf{0}$, entonces:

$$\begin{aligned} A^T PAX + X^T A^T PA - A^T PL - L^T PA &= \mathbf{0} \\ A^T PAX + (A^T PAX)^T - A^T PL - (A^T PL)^T &= \mathbf{0} \\ 2 A^T PAX - 2 A^T PL &= \mathbf{0} \\ A^T PAX - A^T PL &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$A^T PAX = A^T PL \quad (21)$$

La (21) es el sistema de las ecuaciones normales cuando las observaciones son de distinta precisión (caso general). La solución mínimos cuadrados es:

$$X = (A^T PA)^{-1} A^T PL \quad (22)$$

La matriz normal es:

$$N = A^T PA \quad (23)$$

entonces la (22) se expresa:

$$X = N^{-1}A^T PL \quad (24)$$

donde:

$$N^{-1} = E D^{-1} E^T \quad (25)$$

Es necesario entonces, calcular los valores propios de la matriz normal N y sus correspondientes vectores propios normalizados, para hallar su inversa.

Ecuaciones de observación para ángulos:

Derivando parcialmente respecto de X_I en la (1):

$$\frac{\partial \beta}{\partial X_I} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_I - Y_K}{X_I - X_K} \right)^2} \frac{Y_I - Y_K}{(X_I - X_K)^2} = \frac{1}{(X_I - X_K)^2 + (Y_I - Y_K)^2} \frac{Y_I - Y_K}{(X_I - X_K)^2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X_I} = \frac{\Delta Y_{KI}}{D_{KI}^2}. \text{ En forma análoga se tiene: } \frac{\partial \beta}{\partial Y_I} = -\frac{\Delta X_{KI}}{D_{KI}^2}; \frac{\partial \beta}{\partial X_J} = -\frac{\Delta Y_{KJ}}{D_{KJ}^2};$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y_J} = \frac{\Delta X_{KJ}}{D_{KJ}^2}; \frac{\partial \beta}{\partial X_K} = -\left(\frac{\Delta Y_{KI}}{D_{KI}^2} - \frac{\Delta Y_{KJ}}{D_{KJ}^2} \right); \frac{\partial \beta}{\partial Y_K} = \left(\frac{\Delta X_{KI}}{D_{KI}^2} - \frac{\Delta X_{KJ}}{D_{KJ}^2} \right)$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la (12), se tienen las ecuaciones de observación para ángulos:

$$\rho'' \left[\frac{\Delta Y_{KI}}{D_{KI}^2} dX_I - \frac{\Delta X_{KI}}{D_{KI}^2} dY_I - \frac{\Delta Y_{KJ}}{D_{KJ}^2} dX_J + \frac{\Delta X_{KJ}}{D_{KJ}^2} dY_J - \left(\frac{\Delta Y_{KI}}{D_{KI}^2} - \frac{\Delta Y_{KJ}}{D_{KJ}^2} \right) dX_K + \left(\frac{\Delta X_{KI}}{D_{KI}^2} - \frac{\Delta X_{KJ}}{D_{KJ}^2} \right) dY_K \right] = \beta_b - \beta^o + v_\beta \quad (26)$$

Si tanto los ángulos observados como los aproximados se expresan en segundos de arco ("") y también los residuos o correcciones, el primer miembro de la (26) deberá multiplicarse por $\rho = 206265 \text{ ''/rad}$ para satisfacer la homogeneidad dimensional.

Ecuaciones de observación para distancias:

Derivando parcialmente respecto de X_I en la (3):

$$\frac{\partial D}{\partial X_I} = -\frac{2(X_J - X_I)}{2\sqrt{(X_J - X_I)^2 + (Y_J - Y_I)^2}} = -\frac{\Delta X_{IJ}}{D_{IJ}}$$

$$\text{Análogamente: } \frac{\partial D}{\partial Y_I} = -\frac{\Delta Y_{IJ}}{D_{IJ}}; \quad \frac{\partial D}{\partial X_J} = \frac{\Delta X_{IJ}}{D_{IJ}}; \quad \frac{\partial D}{\partial Y_J} = \frac{\Delta Y_{IJ}}{D_{IJ}}$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la (12), se tienen las ecuaciones de observación para distancias:

$$-\frac{\Delta X_{IJ}}{D_{IJ}} dX_I - \frac{\Delta Y_{IJ}}{D_{IJ}} dY_I + \frac{\Delta X_{IJ}}{D_{IJ}} dX_J + \frac{\Delta Y_{IJ}}{D_{IJ}} dY_J = D_b - D^o + v_D \quad (27)$$

Esta ecuación tiene homogeneidad dimensional, puesto que ambos miembros están expresados en unidades de longitud.

Redes planas libres y vinculadas:

La principal característica de una red vinculada o ligada es que entre los datos iniciales (observaciones) se incluye el sistema de referencia en el cual se pretende ajustar la red. La inclusión del sistema de referencia implica el conocimiento de las coordenadas de al menos dos puntos de la red, los que definirán la orientación y el factor de escala. Considerando fijos al menos dos puntos de la red, estamos introduciendo cuatro constreñimientos: orientación, escala y posición respecto del origen. Una vez fijados dos puntos de la red, esta se dice mínimamente constreñida y con esto se logra que la matriz de diseño A sea de rango completo; es decir, $\mathfrak{R}(A) = m$, siendo m el número de parámetros (coordenadas planas) a ajustar. Si se fijan más de dos puntos se tiene una red sobreconstreñida. Puesto que la matriz de diseño A es de rango completo, también lo es la matriz normal N, luego la solución mínimos cuadrados dada por la (24) es única, dado que N es una matriz no singular que admite inversa regular (Cayley) y ésta es, como se sabe, única.

El cálculo de compensación de la red vinculada con solución determinista, requiere de la aceptación como exactos de ciertos datos a priori como son las coordenadas de los puntos fijos o bien la orientación y la escala. Sin embargo estos valores que se han considerado fijos, están afectados de errores inevitables, de tal forma que dichos errores serán introducidos en el ajuste o compensación e influirán en los resultados finales.

La consideración de no disponer de datos de partida fijos (las coordenadas de al menos dos puntos), hace que la red no este sujeta a sistema de referencia alguno predefinido, por tanto, la solución de la red libre, geoméricamente indeterminista, presentará infinitas soluciones. Esta nueva situación en el ajuste o compensación de la red, hace que el sistema de las ecuaciones normales (21) en este nuevo planteamiento, presente una indeterminación ya que la matriz normal N resulta singular, $\det(N) = 0$. La deficiencia de rango de N se debe a la falta de constreñimientos de la red. Debemos hallar pues la solución mínimos cuadrados mínima norma; es decir la solución óptima dada por la pseudoinversa de Moore-Penrose; es decir: $X = N^+ A^T P L$, tal como se estudió en el tema 2 anterior (sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes).

Ecuaciones de observación para coordenadas:

En general, las redes de densificación se vinculan a vértices de otras redes preexistentes consideradas de mayor precisión. En ese caso las coordenadas de los puntos fijos no están libres de error, en consecuencia podemos considerarlas como nuevas

observaciones y plantear las ecuaciones de observación para coordenadas en el j-ésimo vértice, de la siguiente manera:

$$X_j = X_j^o + dX_j = X_{jb} + v_{Xj}$$

$$Y_j = Y_j^o + dY_j = Y_{jb} + v_{Yj}$$

o bien:

$$dX_j = X_{jb} - X_j^o + v_{Xj}$$

$$dY_j = Y_{jb} - Y_j^o + v_{Yj}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{jb} - X_j^o \\ Y_{jb} - Y_j^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{Xj} \\ v_{Yj} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Hemos incluido las ecuaciones de observación para coordenadas junto a las ecuaciones de observación para ángulos y distancias. Las ecuaciones de observación para coordenadas son linealmente independientes entre si y linealmente independientes de las restantes. Incluyendo ecuaciones de observación para coordenadas, se supera el defecto de rango de la matriz de diseño A.

Cuando consideramos dos o más puntos fijos, las correcciones diferenciales a sus coordenadas son cero. Estamos introduciendo entonces los constreñimientos necesarios para superar el defecto de rango de la matriz A y no es necesario considerar ecuaciones de observación para coordenadas. Cuando introducimos las ecuaciones de observación para coordenadas, como observaciones de gran peso, estamos en presencia de una red vinculada o ligada, tal como si se tratara de puntos fijos cuasi sin error.

Ejemplo1: Ajustar la red plana de la figura:

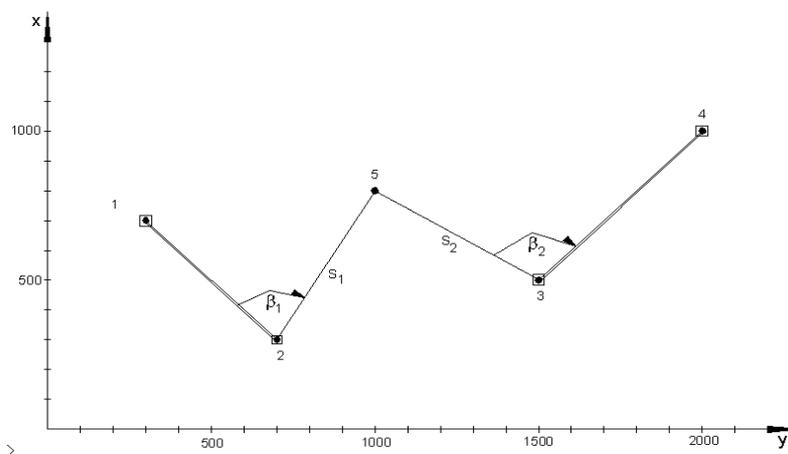


figura 3

Datos:

Coordenadas puntos fijos

punto	X(m)	Y(m)
1	700.00	300.00
2	300.00	700.00
3	500.00	1500.00
4	1000.00	2000.00

Coordenadas aproximadas

punto	X°(m)	Y°(m)
5	800.00	1200.00

Observaciones:

ángulo	error	distancia	error
$\beta_1 = 90^\circ 00' 10''$	$\pm 10''$	$s_1 = 707.00 \text{ m}$	$\pm 0.053 \text{ m}$
$\beta_2 = 89^\circ 59' 55''$	$\pm 10''$	$s_2 = 424.15 \text{ m}$	$\pm 0.041 \text{ m}$

Ecuaciones de observación para ángulos:

$$\rho'' \left[-\frac{\Delta Y_{25}}{s_1^2} dX_5 + \frac{\Delta X_{25}}{s_1^2} dY_5 \right] = \beta_{1b} - \beta_1^\circ + v_{\beta_1}$$

$$\rho'' \left[\frac{\Delta Y_{35}}{s_2^2} dX_5 - \frac{\Delta X_{35}}{s_2^2} dY_5 \right] = \beta_{2b} - \beta_2^\circ + v_{\beta_2}$$

Ecuaciones de observación para distancias:

$$\frac{\Delta X_{25}}{s_1} dX_5 + \frac{\Delta Y_{25}}{s_1} dY_5 = s_{1b} - s_1^\circ + v_{s_1}$$

$$-\frac{\Delta X_{53}}{s_2} dX_5 - \frac{\Delta Y_{53}}{s_2} dY_5 = s_{2b} - s_2^\circ + v_{s_2}$$

Observables calculados con las coordenadas aproximadas:

$$\beta_1^\circ = \arctg \frac{Y_5^\circ - Y_2}{X_5^\circ - X_2} - \arctg \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = 90^\circ 00' 00''$$

$$\beta_2^\circ = \arctg \frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3} - \arctg \frac{Y_5^\circ - Y_3}{X_5^\circ - X_3} = 90^\circ 00' 00''$$

$$s_1^\circ = \sqrt{(X_5^\circ - X_2)^2 + (Y_5^\circ - Y_2)^2} = 707.11 \text{ m}$$

$$s_2^\circ = \sqrt{(X_5^\circ - X_3)^2 + (Y_5^\circ - Y_3)^2} = 424.27 \text{ m}$$

Las ecuaciones de observación para ángulos y distancias:

$$-206.26 dX_5 + 206.26 dY_5 = 10'' + v_{\beta_1}$$

$$\begin{aligned}
 -343.76 dX_5 - 343.76 dY_5 &= -5'' + v_{\beta 2} \\
 0.707 dX_5 + 0.707 dY_5 &= -0.11 + v_{s1} \\
 0.707 dX_5 - 0.707 dY_5 &= -0.12 + v_{s2}
 \end{aligned}$$

Los pesos de las observaciones:

La matriz de los pesos:

$$p_{\beta 1} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$

$$p_{\beta 1} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$

$$p_{s1} = \frac{1}{(0.053)^2} = 356$$

$$p_{s2} = \frac{1}{(0.041)^2} = 595$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 356 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 595 \end{bmatrix}$$

La matriz de diseño A:

El vector L: L = L_b - L^o

$$A = \begin{bmatrix} -206.26 & 206.26 \\ -343.76 & -343.76 \\ 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -0.11 \\ -0.12 \end{bmatrix}$$

La matriz normal: N = A^TPA

La matriz normal inversa: N⁻¹

$$N = \begin{bmatrix} 2082.5 & 636.8 \\ 636.8 & 2082.5 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0005297 & -0.0001620 \\ -0.0001620 & 0.0005297 \end{bmatrix}$$

Los términos independientes: A^TPL = $\begin{bmatrix} -81.6039 \\ 60.6077 \end{bmatrix}$

La solución mínimos-cuadrados: X = (A^TPA)⁻¹A^TPL

$$X = \begin{bmatrix} 0.0005297 & -0.0001620 \\ -0.0001620 & 0.0005297 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -81.6039 \\ 60.6077 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0530 \\ 0.0453 \end{bmatrix}$$

Coordenadas ajustadas del punto 5:

$$X_5 = X_5^o + dX_5 = 800.00\text{ m} - 0.0530\text{ m} = 799.947\text{ m}$$

$$Y_5 = Y_5^o + dY_5 = 1200.00\text{ m} + 0.0453\text{ m} = 1200.045\text{ m}$$

Correcciones a las observaciones: $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} -206.26 & 206.26 \\ -343.76 & -343.76 \\ 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.053 \\ 0.0453 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -0.11 \\ -0.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.29'' \\ 7.65'' \\ 0.104\text{ m} \\ 0.050\text{ m} \end{bmatrix}$$

La varianza a posteriori:

$$n = 4, m = 2, r = 0 \rightarrow \nu = n - m + r = 4 - 2 + 0 = 2, V^T P V = 7.0499$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{\nu} = \frac{7.0499}{2} = 3.5249$$

Redes Altimétricas: Sean dos puntos I, J del terreno cuyas elevaciones respecto de un plano de referencia son Z_I, Z_J respectivamente, figura 4.

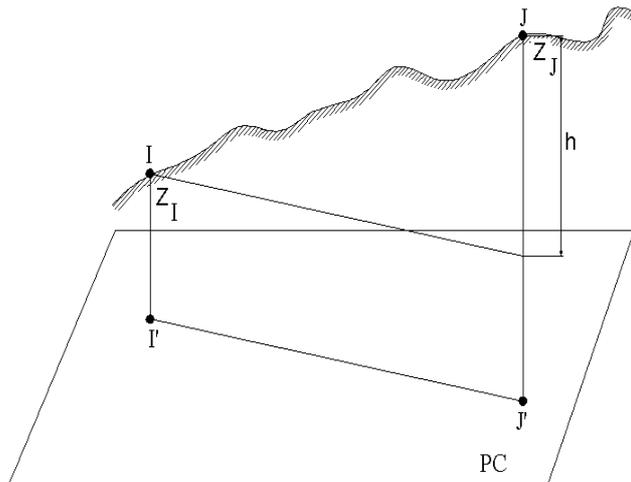


figura 4

El desnivel h entre ambos puntos es función de las cotas (elevaciones) respectivas:

$$h = f(Z_I, Z_J) \quad (29)$$

El observable h es una función lineal de los parámetros Z_I, Z_J :

$$h = Z_J - Z_I \quad (30)$$

Sean Z_I° , Z_J° las cotas aproximadas y dZ_I , dZ_J sus respectivas correcciones diferenciales. Los parámetros o cotas ajustadas son:

$$\begin{aligned} Z_I &= Z_I^{\circ} + dZ_I \\ Z_J &= Z_J^{\circ} + dZ_J \end{aligned} \quad (31)$$

El desnivel observado es h_b , el desnivel ajustado es h y la corrección (residuo) es v_h , entonces:

$$h = h_b + v_h \quad (32)$$

Reemplazando en (30):

$$h_b + v_h = Z_J^{\circ} + dZ_J - (Z_I^{\circ} + dZ_I)$$

La ecuación de observación altimétrica es:

$$-dZ_I + dZ_J = h_b - (Z_J^{\circ} - Z_I^{\circ}) + v_h$$

Haciendo $h^{\circ} = Z_J^{\circ} - Z_I^{\circ}$, se tiene:

$$-dZ_I + dZ_J = h_b - h^{\circ} + v_h \quad (33)$$

Si se trata una red altimétrica formada por más de una figura cerrada, el conjunto de las ecuaciones lineales (33), una por cada desnivel observado, es el modelo funcional para este tipo de redes.

Ejemplo2: Ejecutar el ajuste libre de la red altimétrica de la figura, donde la flecha indica el punto de mayor cota en el desnivel correspondiente:

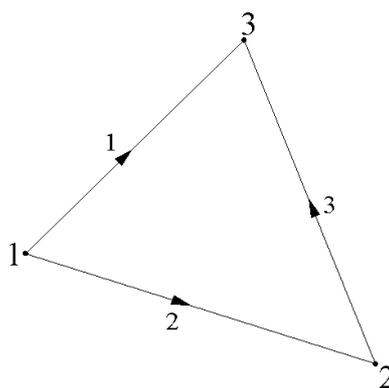


figura 5

nivelación geométrica: error estándar de un desnivel: $\sigma_h = \frac{10 \text{ mm}}{\sqrt{km}} \sqrt{L(km)}$

Datos:

punto	Z°(m)	I-J	h _b (m)	L(km)	peso
1	100	1-3	40.01	0.3	33333
2	120	1-2	19.97	0.4	25000
3	140	2-3	20.02	0.5	20000

Los pesos: $p_h = \frac{1}{\left(\frac{\hat{\sigma}_h}{1000}\right)^2} = \frac{1}{\left[\frac{10\text{mm}\sqrt{L(\text{km})}}{\sqrt{\text{km}}1000}\right]^2}$

La matriz de los pesos: $P = \begin{bmatrix} 33333 & & \\ & 25000 & \\ & & 20000 \end{bmatrix}$

Las ecuaciones de observación:

desnivel 1-3 → $-dZ_1 + dZ_3 = 40.01 - (140 - 100) + v_1$.
 desnivel 1-2 → $-dZ_1 + dZ_2 = 19.97 - (120 - 100) + v_2$
 desnivel 2-3 → $-dZ_2 + dZ_3 = 20.02 - (140 - 120) + v_3$

desnivel 1-3 → $-dZ_1 + dZ_3 = 0.01 + v_1$.
 desnivel 1-2 → $-dZ_1 + dZ_2 = -0.03 + v_2$
 desnivel 2-3 → $-dZ_2 + dZ_3 = 0.02 + v_3$

El modelo funcional:

$$AX = L + V \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ dZ_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.03 \\ 0.02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz de diseño A es: $\mathfrak{R}(A) = 2$, el defecto de rango es $r = m - \mathfrak{R}(A) = 1$
 Toda red altimétrica libre tiene solo un grado de libertad; basta fijar la cota de un punto para que la red sea vinculada.

La matriz normal: $N = A^T P A = \begin{bmatrix} 58333 & -25000 & -33333 \\ -25000 & 45000 & -20000 \\ -33333 & -20000 & 53333 \end{bmatrix}$

Los términos independientes: $A^T P L = \begin{bmatrix} 416.67 \\ -1150.00 \\ 733.33 \end{bmatrix}$

El sistema de las ecuaciones normales: $A^T P A X = A^T P L$

$$\begin{bmatrix} 58333 & -25000 & -33333 \\ -25000 & 45000 & -20000 \\ -33333 & -20000 & 53333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ dZ_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 416.67 \\ -1150.00 \\ 733.33 \end{bmatrix}$$

Valores propios y vectores propios normalizados de la matriz normal N:

$$\lambda_1 = 6666.7, \lambda_2 = 8999.9, \lambda_3 = 0$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0.2673 \\ -0.8018 \\ 0.5345 \end{bmatrix}; e_2 = \begin{bmatrix} 0.7715 \\ -0.1543 \\ -0.6172 \end{bmatrix}; e_3 = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \end{bmatrix}$$

Las matrices D y E:

$$D = \begin{bmatrix} 6666.7 & & \\ & 8999.9 & \\ & & 0 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.7715 & -0.5774 \\ -0.8018 & -0.1543 & -0.5774 \\ 0.5345 & -0.6172 & -0.5774 \end{bmatrix}$$

Eliminando el valor propio nulo y su correspondiente vector propio normalizado:

$$D = \begin{bmatrix} 6666.7 & \\ & 8999.9 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.7715 \\ -0.8018 & -0.1543 \\ 0.5345 & -0.6172 \end{bmatrix}$$

La pseudoinversa de Moore-Penrose:

$$N^+ = E D^{-1} E^T = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.7685 & -0.4537 & -0.3148 \\ -0.4537 & 0.9907 & -0.5370 \\ -0.3148 & -0.5370 & 0.8519 \end{bmatrix}$$

La solución óptima: $X = N^+ A^T P L = E D^{-1} E^T A^T P L$

$$X = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.7685 & -0.4537 & -0.3148 \\ -0.4537 & 0.9907 & -0.5370 \\ -0.3148 & -0.5370 & 0.8519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 416.67 \\ -1150.00 \\ 733.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0061 \\ -0.0172 \\ -0.0111 \end{bmatrix}$$

Las cotas ajustadas:

$$Z_1 = Z_1^o + dZ_1 = 100m + 0.0061m = 100.0061m$$

$$Z_2 = Z_2^o + dZ_2 = 120m - 0.0172m = 119.9828m$$

$$Z_3 = Z_3^o + dZ_3 = 140m + 0.0111m = 140.0111m$$

El vector de las correcciones: $V = AX - L$

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0061 \\ -0.0172 \\ 0.0111 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.03 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0050 \\ 0.0067 \\ 0.0083 \end{bmatrix}$$

Desniveles ajustados:

$$h_1 = h_{b_1} + v_1 = 40.01 m - 0.0050 m = 40.0050 m$$

$$h_2 = h_{b_2} + v_2 = 19.97 m + 0.0067 m = 19.9767 m$$

$$h_3 = h_{b_3} + v_3 = 20.02 m + 0.0083 m = 20.0283 m$$

Verificación del cierre: $h_1 - h_2 - h_3 = 0$

$$h_1 - h_2 - h_3 = 40.0050 m - 19.9767 m - 20.0283 m = 0 m$$

La varianza a posteriori: $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{v}$

$$v = n - m + r = 3 - 3 + 1 = 1, \quad V^T P V = 3.3333, \quad \hat{\sigma}_0^2 = 3.3333$$

Ajuste altimétrico vinculado: Si en una red altimétrica de p puntos fijamos la cota de uno de ellos, la red queda constreñida respecto del desplazamiento vertical. Desaparece pues el defecto de rango de las matrices A y N , siendo estas ahora de rango completo y, en consecuencia, existe la inversa regular N^{-1} . Si fijamos más de un punto, la red se dice sobreconstreñida. Las cotas de los puntos fijos se consideran como observaciones nuevas a las que asignamos pesos elevados. Si I es el punto altimétrico fijo, se tiene:

$$Z_I = Z_{Ib} + v_{ZI} \quad (34)$$

La cota ajustada Z_I se expresa por:

$$Z_I = Z_I^{\circ} + dZ_I \quad (35)$$

donde Z_I° es un valor aproximado de la cota fija; sustituyendo (35) en (34):

$$Z_I^{\circ} + dZ_I = Z_{Ib} + v_{ZI}$$

$$dZ_I = Z_{Ib} - Z_I^{\circ} + v_{ZI} \quad (36)$$

La (36) es la ecuación de observación para cotas, donde Z_{Ib} es el valor de la cota fija que consideramos como una observación de gran peso.

Ejemplo3: Ejecutar el ajuste vinculado de la red altimétrica del ejemplo 2. El punto fijo es el 1, cuya cota es $Z_{b1} = 100.05$ m con un error estándar $\sigma_{Z1} = \pm 0.001$ m. Una cota aproximada para 1 es $Z_1^o = 100.00$ m.

La ecuación de observación para la cota del punto fijo 1:

$$dZ_1 = Z_{1b} + v_{Z1} = 100.05 - 100.00 + v_{Z1}$$

$$dZ_1 = 0.05 + v_{Z1}$$

La matriz de diseño A y el vector $L = L_b - L^o$, son respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0.001 \\ -0.03 \\ 0.02 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{R}(A) = 3; \quad m = 3 \rightarrow r = m - \mathfrak{R}(A) = 3 - 3 = 0$$

A es ahora de rango completo.

La matriz de los pesos: $P = \begin{bmatrix} 33333 & & & \\ & 25000 & & \\ & & 20000 & \\ & & & 1000000 \end{bmatrix}$

La matriz normal: $N = A^T P A$

$$N = \begin{bmatrix} 1058333 & -25000 & -33333 \\ -25000 & 45000 & -20000 \\ -33333 & -20000 & 53333 \end{bmatrix}$$

Las matrices D y E:

$$D = 10^6 \begin{bmatrix} 0.0271 & & \\ & 0.0695 & \\ & & 1.060 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} -0.0393 & -0.0098 & -0.9992 \\ -0.7693 & 0.6384 & 0.0240 \\ -0.6373 & -0.7697 & 0.0326 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = E D^{-1} E^T = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0100 & 0.0100 \\ 0.0100 & 0.2767 & 0.1100 \\ 0.0100 & 0.1100 & 0.2350 \end{bmatrix}$$

Puesto que $\det(N) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1061883.45 \neq 0$, existe la inversa regular N^{-1} .

$$N^{-1} = ED^{-1}E^T = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0100 & 0.0100 \\ 0.0100 & 0.2767 & 0.1100 \\ 0.0100 & 0.1100 & 0.2350 \end{bmatrix}$$

Verifique que:

$$N^{-1} = ED^{-1}E^T = \frac{adj(N)}{|N|} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0100 & 0.0100 \\ 0.0100 & 0.2767 & 0.1100 \\ 0.0100 & 0.1100 & 0.2350 \end{bmatrix}$$

El vector de términos independientes del sistema de las ecuaciones normales: $A^T PL$

$$A^T PL = 10^4 \begin{bmatrix} 5.0417 \\ -0.1150 \\ 0.0733 \end{bmatrix}$$

La solución mínimos cuadrados: $X = N^{-1}A^T PL$

$$X = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0100 & 0.0100 \\ 0.0100 & 0.2767 & 0.1100 \\ 0.0100 & 0.1100 & 0.2350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50417 \\ -1150 \\ 733 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0500 \\ 0.0267 \\ 0.0550 \end{bmatrix}$$

$$\text{Las cotas ajustadas: } Z_a = Z^o + X = \begin{bmatrix} 100.050 \\ 120.027 \\ 140.055 \end{bmatrix}$$

$$\text{Las correcciones a los desniveles: } V = AX - L = \begin{bmatrix} -0.0050 \\ 0.0067 \\ 0.0083 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

La corrección a la cota observada del punto fijo 1 es igual a cero debido al gran peso asignado ($p_{z1} = 1000000$). El punto 1 puede, realmente, considerarse como punto fijo.

$$\text{Los desniveles ajustados: } L_a = L_b + V = \begin{bmatrix} 40.005 \\ 19.977 \\ 20.028 \end{bmatrix}$$

se verifica la condición de cierre altimétrico:

$$h_1 - h_2 - h_3 = 40.005 - 19.977 - 20.028 = 0$$

Plantee y resuelva el ajuste altimétrico vinculado, considerando que la cota del punto fijo 1 no tiene error; es decir, $\hat{\sigma}_{z1} = 0$.

Propagación de los errores de los observables a los parámetros ajustados:

Revisión de conceptos de probabilidad y estadística:

.- Densidad de probabilidad y probabilidad acumulada: Sea X una variable estocástica (aleatoria) unidimensional continua. Para que f(x) sea una función de densidad de probabilidad de la variable estocástica continua X, deberá cumplirse:

$$1).- f(x) \geq 0 \quad (37)$$

$$2).- \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (38)$$

La integral se toma sobre todo el dominio (población de la variable estocástica X). La probabilidad de que la variable estocástica X sea menor o igual que un cierto valor x, es:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (39)$$

La función F se denomina la función distribución acumulativa y es creciente, según su definición (39).

.- La media, expectación o esperanza matemática: La media, también llamada el valor esperado de la variable estocástica continuamente distribuida, se define por:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (40)$$

La media es una función de la densidad de probabilidad de la variable estocástica X. La (40) es análoga a la media ponderada en el caso de las distribuciones discretas. En general, si $y = \varphi(x)$, se tiene:

$$E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad (41)$$

Algunas propiedades importantes de la media o esperanza matemática se obtienen a partir de las (40) y (41):

- 1.- $E[\varphi(x) + \psi(x)] = E[\varphi(x)] + E[\psi(x)]$
- 2.- Si c es una constante, $E[c\varphi(x)] = c E[\varphi(x)]$
- 3.- Si c es una constante, $E[c] = c$

.- La varianza: La varianza de una variable estocástica continua X cuya función de densidad de probabilidad es f(x), se define por:

$$\sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx \quad (42)$$

La varianza mide la dispersión de la densidad de probabilidad en el sentido que da el valor esperado de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media. Una varianza pequeña indica que la mayor parte de la probabilidad está concentrada alrededor de la media.

Ejemplo 4: Sea X una variable aleatoria continua cuya función densidad está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x} & \text{para } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de } x \end{cases}$$

e es la base de los logaritmos naturales.

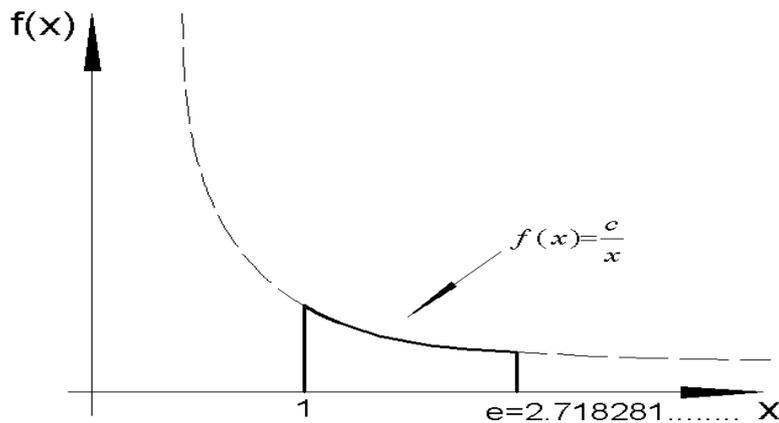


figura 6

- 1.- Hallar c para que f(x) sea una función densidad.
- 2.- Hallar la media de X.
- 3.- Hallar la varianza de X.
- 4.- Hallar la función distribución F.
- 5.- Calcular $p(|X - \mu_X| \leq \sigma_X)$

1.- El valor de c:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e \frac{c}{x} dx = c \int_1^e \frac{1}{x} dx = c [\ln x]_1^e = c(\ln e - \ln 1) = c = 1 \quad \rightarrow c = 1$$

2.- La media de X:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^e x \frac{1}{x} dx = \int_1^e dx = [x]_1^e = e - 1 = 1.71828\dots$$

3.- La varianza de X:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu_X x + \mu_X^2) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu_X^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu_X^2\end{aligned}$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 = \frac{1}{2}(e - 1)(e + 1) - (e - 1)^2 = (e - 1) \left[\frac{1}{2}(e + 1) - (e - 1) \right] =$$

$$(e - 1) \left[\frac{1}{2}e + \frac{1}{2} - e + 1 \right] = (e - 1) \left[-\frac{1}{2}e + \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2}(e - 1)(3 - e) = 0.2420$$

$$\sigma_X^2 = 0.2420 \quad \rightarrow \quad \sigma_X = 0.4919$$

4.- La función distribución F:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x \quad (1 \leq x \leq e)$$

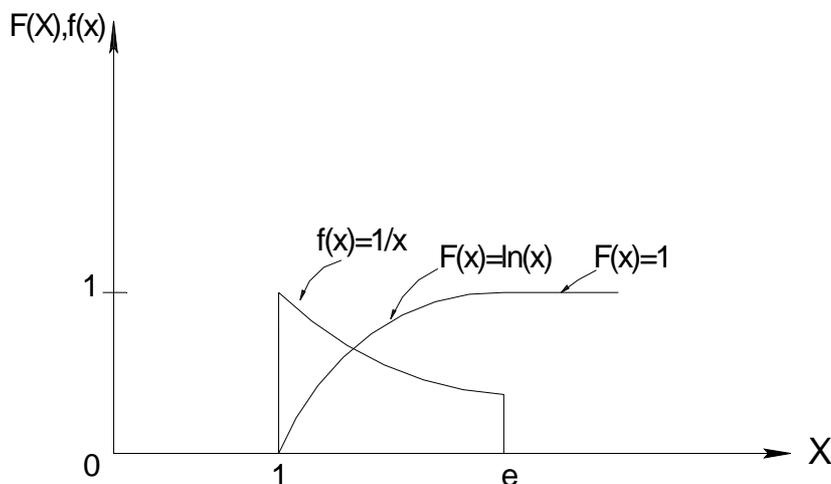


figura 7

5.- Cálculo de: $p(|X - \mu_X| \leq \sigma_X)$

$$\begin{aligned}p(|X - \mu_X| \leq \sigma_X) &= p(-\sigma_X \leq X - \mu_X \leq \sigma_X) = p(\mu_X - \sigma_X \leq X \leq \mu_X + \sigma_X) = \\ &= \int_{\mu_X - \sigma_X}^{\mu_X + \sigma_X} \frac{1}{x} dx = \int_{1.2264}^{2.2102} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{1.2264}^{2.2102} = \ln 2.2102 - \ln 1.2264 = 0.5891 \equiv 58.91\%\end{aligned}$$

La probabilidad de que la variable estocástica X difiera de la media μ_X en menos de una desviación estándar es igual a 0.5891 (58.91 %), figura 8.

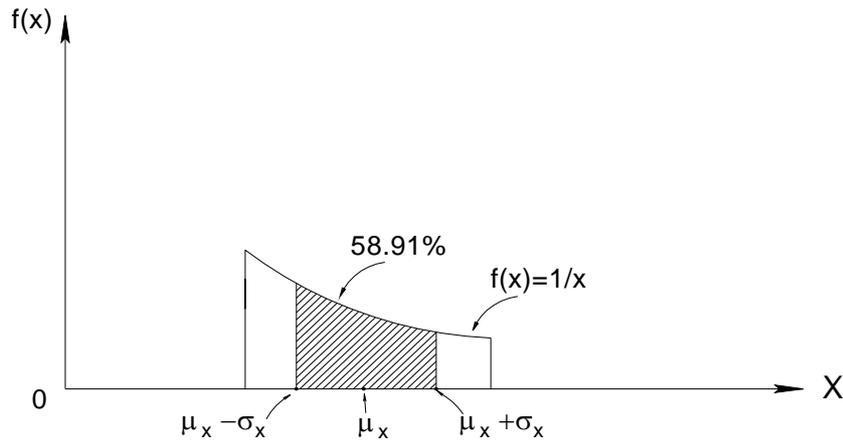


figura 8

Distribución Multivariable:

Sea $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ una variable estocástica multidimensional, donde cada componente x_i ($i = 1, n$) es una variable aleatoria unidimensional. Cualquier función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables continuas x_i , puede ser una función densidad conjunta si:

- 1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$
 - 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$
- (43)

Se sigue que la extensión natural de la (39) es la función distribución acumulada conjunta:

$$p(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1 \quad (44)$$

La densidad marginal de un subconjunto de variables estocásticas (x_1, x_2, \dots, x_p) ; $p < n$, es:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{p+1} dx_{p+2} \dots dx_n \quad (45)$$

Ejemplifiquemos para $n = 2$:

Sea $X = [X_1, X_2]^T$ y $f(X_1, X_2)$ una función densidad conjunta si:

- 1) $f(x_1, x_2) \geq 0$
 - 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$
- (46)

La función distribución conjunta es:

$$p(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (47)$$

Las frecuencias marginales son:

$$f_1(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad y \quad f_2(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \quad (48)$$

Si integramos $f_1(X_1)$ y $f_2(X_2)$ entre $-\infty$ y $+\infty$, se tienen las (49):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = 1 \quad -> \quad f_1(x_1) \text{ es la función densidad de } x_1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad -> \quad f_2(x_2) \text{ es la función densidad de } x_2.$$

Definición: Se dice que X_1, X_2 son estocasticamente independientes si y solamente si:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \quad (50)$$

Vector de medias: La media o esperanza matemática para la componente individual X_i del vector $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$, es:

$$\mu_{X_i} = E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (51)$$

La media del vector X , es:

$$\mu_X = E(X) = [E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)]^T = [\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}]^T \quad (52)$$

Varianza y covarianza: La varianza de una componente individual X_i , es:

$$\sigma_{X_i}^2 = E[(X_i - \mu_{X_i})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_{X_i})^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (53)$$

En las distribuciones multivariantes la covarianza o varianza conjunta es un concepto muy importante. La covarianza describe la relación estadística entre dos variables estocásticas y se define por la (54):

$$\sigma_{X_i X_j} = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_{X_i})(x_j - \mu_{X_j}) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Mientras que la varianza es siempre mayor o igual que cero, la covarianza puede ser positiva, negativa o cero.

Coefficientes de correlación: El coeficiente de correlación de dos variables estocásticas X_i, X_j se define por:

$$\rho_{X_i X_j} = \frac{E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})]}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} = \frac{\sigma_{X_i X_j}}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (55)$$

Una propiedad importante del coeficiente de correlación es la siguiente:

$$-1 \leq \rho_{X_i X_j} \leq 1 \quad (56)$$

Si dos variables aleatorias son estocasticamente independientes, entonces la covarianza (y también el coeficiente de correlación) es igual a cero. Sea por ejemplo, $X = [X_1, X_2]^T$ y la función densidad conjunta es $f(X_1, X_2)$. Si X_1, X_2 son estocasticamente independientes, entonces de la (50): $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ donde $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ son las frecuencias marginales. La covarianza es:

$$\sigma_{X_i X_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{X_1})(x_2 - \mu_{X_2}) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{X_1})(x_2 - \mu_{X_2}) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$

$$\sigma_{X_i X_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{X_1}) f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - \mu_{X_2}) f_2(x_2) dx_2$$

$$\sigma_{X_i X_j} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 - \mu_{X_1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_2(x_2) dx_2 - \mu_{X_2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) dx_2 \right]$$

pero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = \mu_{X_1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) dx_1 = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_2(x_2) dx_2 = \mu_{X_2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) dx_2 = 1$$

entonces:

$$\sigma_{X_1 X_2} = (\mu_{X_1} - \mu_{X_1})(\mu_{X_2} - \mu_{X_2}) = 0$$

Luego: **independencia estocástica** \rightarrow **correlación nula**

La proposición inversa es válida solamente para la distribución normal multivariable, como veremos mas adelante.

Ejemplo5: Sea la función de densidad conjunta definida por:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c x_1 x_2 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

- 1.- Calcular el valor de c para que $f(x_1, x_2)$ sea una función densidad conjunta.
- 2.- Calcular $p(x_1 + x_2 \leq 3)$.
- 3.- Hallar las densidades o frecuencias marginales $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$.
- 4.- ¿Son X_1 y X_2 estocasticamente independientes?

1.- El valor de c:

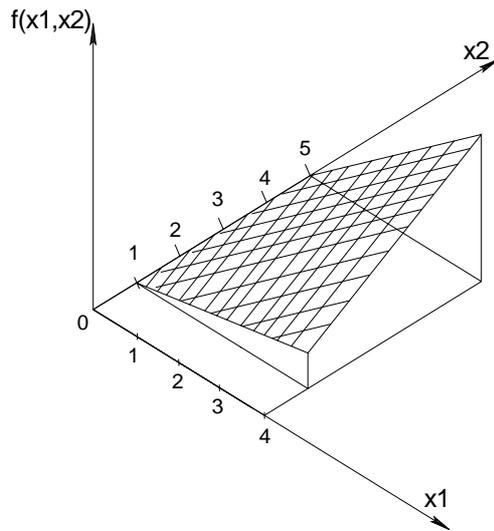


figura 9

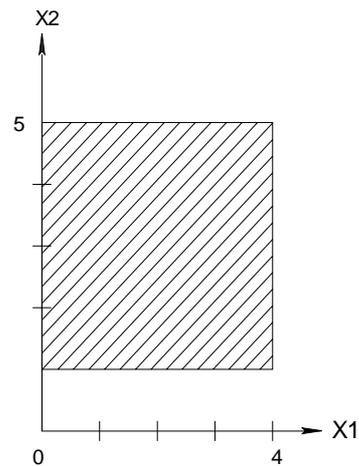


figura 10

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^4 \int_1^5 c x_1 x_2 dx_1 dx_2 = c \int_0^4 x_1 \left[\int_1^5 x_2 dx_2 \right] dx_1 = c \int_0^4 x_1 \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_1^5 dx_1 =$$

$$= \frac{c}{2} \int_0^4 x_1 (25 - 1) dx_1 = \frac{c}{2} 24 \int_0^4 x_1 dx_1 = c 12 \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^4 = c 12 \cdot 8 = 96 c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{96}$$

2.- $p(x_1 + x_2 \leq 3)$:

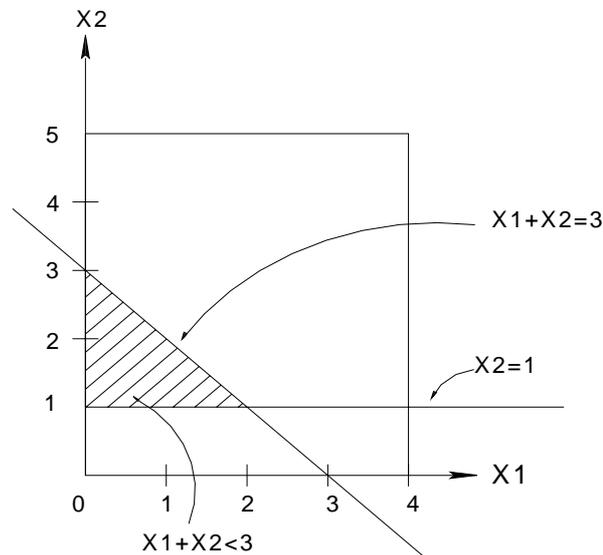


figura 11

$$p(x_1 + x_2 \leq 3) = \frac{1}{96} \int_0^2 \int_1^{3-x_1} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{96} \int_0^2 x_1 \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_1^{3-x_1} dx_1 = \frac{1}{2 \cdot 96} \int_0^2 [x_1(3-x_1)^2 - x_1] dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 96} \int_0^2 x_1 (9 - 6x_1 + x_1^2 - 1) dx_1 = \frac{1}{2 \cdot 96} \int_0^2 (8x_1 - 6x_1^2 + x_1^3) dx_1 = \frac{1}{2 \cdot 96} \left[8 \frac{x_1^2}{2} - 6 \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 96} \left[4x_1^2 - 2x_1^3 + \frac{x_1^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2 \cdot 96} \left[16 - 16 + \frac{16}{4} \right] = \frac{1}{2 \cdot 96} \cdot 4 = \frac{2}{96} = 0.02083 \equiv 2.08 \%$$

$p(x_1 + x_2 \leq 3) = 2.08 \%$ (probabilidad de que la variable aleatoria conjunta (X_1, X_2) tome valores dentro del área sombreada en la figura.

3.- Densidades marginales:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 = \frac{1}{96} \int_1^5 x_1 x_2 dx_2 = \left[\frac{x_1 x_2^2}{96 \cdot 2} \right]_1^5 = \frac{x_1}{96 \cdot 2} (25 - 1) = \frac{24}{2 \cdot 96} x_1 = \frac{1}{8} x_1$$

$$f_1(x_1) = \frac{1}{8} x_1$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 = \frac{1}{96} \int_0^4 x_1 x_2 dx_1 = \left[\frac{x_2 x_1^2}{96 \cdot 2} \right]_0^4 = \frac{x_2}{96 \cdot 2} \cdot 16 = \frac{8}{96} x_2 = \frac{x_2}{12}$$

$$f_2(x_2) = \frac{x_2}{12}$$

4.- Independencia estocástica:

$$f_1(x_1) f_2(x_2) = \frac{1}{8} x_1 \frac{1}{12} x_2 = \frac{x_1 x_2}{96} = f(x_1, x_2) \quad \rightarrow \quad X_1, X_2 \text{ son estocásticamente independientes.}$$

La matriz varianza-covarianza:

Sea $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ una variable estocástica multidimensional (conjunta) y sea $\mu_X = E(X) = [\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}]^T$ el vector de medias. La matriz varianza-covarianza se define por:

$$\Sigma_X = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] \quad (57)$$

puesto que: $X - \mu_X = [X_1 - \mu_{X_1}, X_2 - \mu_{X_2}, \dots, X_n - \mu_{X_n}]^T$, se tiene:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_{X_1})^2] & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] & \cdots & E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_n - \mu_{X_n})] \\ & E[(X_2 - \mu_{X_2})^2] & \cdots & E[(X_2 - \mu_{X_2})(X_n - \mu_{X_n})] \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & E[(X_n - \mu_{X_n})^2] \end{bmatrix}$$

entonces, la matriz varianza covarianza de la variable estocástica conjunta X, es:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n} \\ & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Propagación:

Sea Y una función lineal de la variable estocástica multidimensional $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$:

$$Y = AX + X^\circ \quad (59)$$

donde A es una matriz de orden rxn y X° es un vector constante de orden rx1. El valor esperado de Y es:

$$E[Y] = \mu_Y = E[AX + X^\circ] = E[AX] + E[X^\circ] = E[AX] + X^\circ = AE[X] + X^\circ$$

$$\mu_Y = A\mu_X + X^\circ \quad (60)$$

La (60) es la ley de propagación de la media.

La ley de propagación de la varianza-covarianza es como sigue, según la definición (57):

$$\begin{aligned} \Sigma_Y &= E[(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^T] = E[(AX + X^\circ - A\mu_X - X^\circ)(AX + X^\circ - A\mu_X - X^\circ)^T] = \\ &= E[(AX - A\mu_X)(AX - A\mu_X)^T] = E[A(X - \mu_X)(A(X - \mu_X))^T] = E[A(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T A^T] = \\ &= AE[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] A^T = A\Sigma_X A^T \end{aligned}$$

entonces:

$$\Sigma_Y = A\Sigma_X A^T \quad (61)$$

La (61) es la generalización de la (28) del tema 1.

Distribución normal multivariable conjunta:

La estadística complementa la teoría del ajuste mínimos cuadrados puesto que posibilita formular sentencias objetivas acerca de los datos. Los requerimientos básicos consisten en que tanto el modelo funcional como el modelo estocástico sean correctos y que las observaciones tengan distribución normal multivariable o conjunta. Si bien la estadística no garantiza una decisión correcta, resulta útil a la hora de tomarla.

Comenzaremos con un hecho muy frecuente en topografía. Se trata pues de obtener las coordenadas cartesianas X, Y de un punto P mediante la observación de rumbo φ y distancia D , figura 12, Suponemos errores estándar σ_φ, σ_D para los observables rumbo y distancia respectivamente.

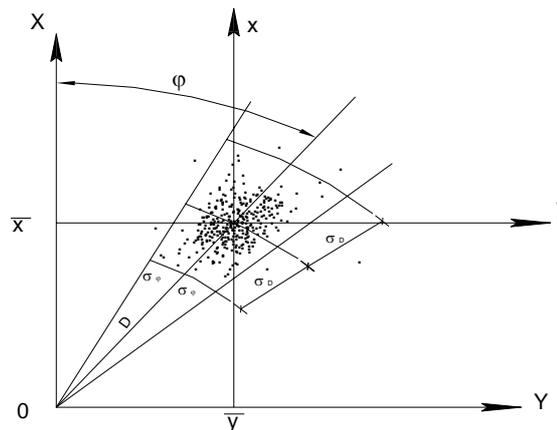


figura 12

Si hacemos un número muy grande de observaciones para el rumbo φ y la distancia D , las coordenadas:

$$\begin{aligned} X &= D \cos \varphi \\ Y &= D \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad (62)$$

se distribuyen como muestra la figura (12) con gran concentración (densidad) alrededor de las coordenadas medias \bar{X}, \bar{Y} y disminuyendo su concentración en forma radial.

La función densidad conjunta es la distribución normal bivariante $f(X, Y)$ donde X, Y son variables estocásticas con distribución normal, figura 13. Obsérvese que la densidad de probabilidad disminuye en forma radial conforme nos alejamos del punto (\bar{X}, \bar{Y}) .

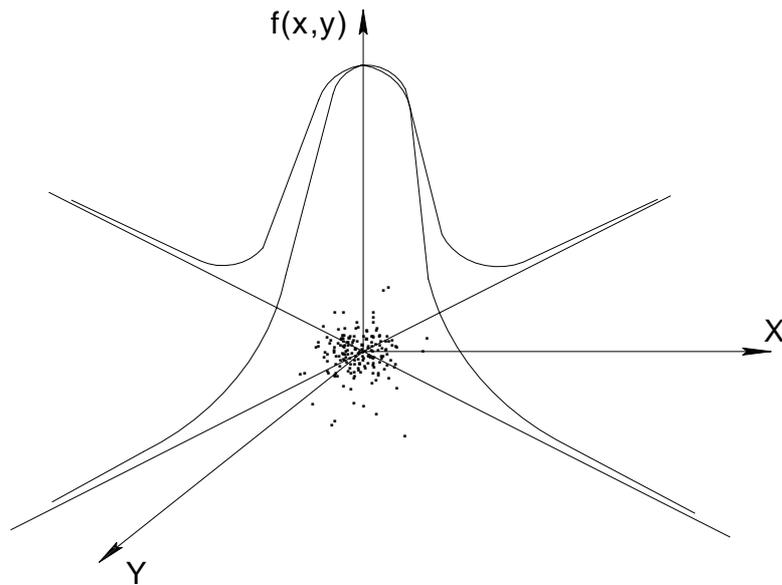


figura 13

Sea en general, un vector X de orden $n \times 1$ cuyas componentes son variables estocásticas. El vector de medias es:

$$E[X] = \mu_X \quad (63)$$

y la matriz varianza-covarianza es:

$$\Sigma_X = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] \quad (64)$$

de orden $n \times n$. Si X tiene distribución normal multivariable o conjunta, la función densidad conjunta es:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_X|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(X - \mu_X)^T \Sigma_X^{-1} (X - \mu_X)} \quad (65)$$

La media (63) y la matriz varianza-covarianza (64) describen completamente la distribución normal multivariable:

$$X_{n \times 1} \sim N_n(\mu_{X_{n \times 1}}, \Sigma_{X_{n \times n}}) \quad (66)$$

esta notación significa que X distribuye normal multivariable con media μ_X y matriz varianza-covarianza Σ_X , siendo n la dimensión de la distribución.

Para $n = 1$, por ejemplo, se tiene una variable estocástica unidimensional $X_{1 \times 1} = [x]$. En este caso:

$$\Sigma_X = \sigma^2; \quad |\Sigma_X| = \sigma^2; \quad |\Sigma_X|^{\frac{1}{2}} = \sigma; \quad \Sigma_X^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}$$

donde σ^2 es la varianza de X y μ es su media. Sustituyendo en (65), se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (67)$$

que es la ya conocida ecuación de la curva normal de Gauss.

Par $n = 2$ se tiene el conjunto de las expresiones siguientes:

$$X = [x_1, x_2]^T; \quad E[X] = \mu_X = [\mu_1, \mu_2]^T; \quad \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Para simplificar la notación se ha considerado:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{x1}; \quad \mu_2 = \mu_{x2}; \quad \sigma_{x1}^2 = \sigma_1^2; \quad \sigma_{x2}^2 = \sigma_2^2; \quad \sigma_{x1x2} = \sigma_{12}; \quad \rho_{x1x2} = \rho_{12} \\ \rho_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}; \quad X - \mu_X = [x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2] \end{aligned}$$

El determinante de la matriz varianza-covarianza es:

$$|\Sigma_X| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \rho_{12}^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)$$

entonces: $|\Sigma_X|^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1 - \rho_{12}^2)}$

La inversa de la matriz varianza-covarianza, es:

$$\Sigma_X^{-1} = \frac{1}{(\sigma_1 \sigma_2)^2 (1 - \rho_{12}^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora la expresión: $\frac{1}{2}(X - \mu_X)^T \Sigma_X^{-1} (X - \mu_X)$ en la (65); (simplificando la notación $\rho_{12} = \rho$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(X - \mu_X)^T \frac{1}{(\sigma_1 \sigma_2)^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} (X - \mu_X) = \\ & = \frac{1}{2}(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \frac{1}{(\sigma_1 \sigma_2)^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} = \\ & = \frac{1}{2(\sigma_1 \sigma_2)^2 (1 - \rho^2)} \left[(x_1 - \mu_1) \sigma_2^2 - (x_2 - \mu_2) \sigma_{12}, -(x_1 - \mu_1) \sigma_{12} + (x_2 - \mu_2) \sigma_1^2 \right] \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(\sigma_1\sigma_2)^2(1-\rho^2)} \left[(x_1 - \mu_1)^2 \sigma_2^2 - (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\sigma_{12} - (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\sigma_{12} + (x_2 - \mu_2)^2 \sigma_1^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2(\sigma_1\sigma_2)^2(1-\rho^2)} \left[(x_1 - \mu_1)^2 \sigma_2^2 - 2(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\sigma_{12} + (x_2 - \mu_2)^2 \sigma_1^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \sigma_{12} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \rho \sigma_1 \sigma_2 + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2 \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \rho + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]
\end{aligned}$$

entonces, la función densidad conjunta para la distribución normal bivariable, es:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]} \quad (68)$$

Si asumimos correlación cero ($\rho = 0$), la (68) se transforma en:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]} \quad (69)$$

es decir:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \quad (70)$$

donde:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} ; \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

$f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ son las densidades marginales o frecuencias propias de x_1 y x_2 respectivamente. Luego:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$

Concluimos entonces que si $X = [x_1, x_2]^T$ distribuye normal bivariable con media μ_X y varianza-covarianza Σ_X , entonces:

correlación nula → independencia estocástica

Las elipses de error como regiones de confianza:

Sea una distribución normal conjunta bivariable de las variables estocásticas x_1, x_2 donde $X = [x_1, x_2]^T$. Los valores esperados o medias son:

$$E(x_1) = E(x_2) = 0 \rightarrow \mu_X = [\mu_1, \mu_2]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y sus varianzas son $\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2$ respectivamente.

La función densidad conjunta, es entonces:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{x_1^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\rho \frac{x_1 x_2}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} + \frac{x_2^2}{\sigma_{x_2}^2} \right]} \quad (71)$$

Hacemos:

$$S^2 = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{x_1^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\rho \frac{x_1 x_2}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} + \frac{x_2^2}{\sigma_{x_2}^2} \right] \quad (72)$$

La (72) es la ecuación de una elipse rotada y centrada en el origen O, para $f(x_1, x_2) =$ constante. Cortando la superficie (71) con planos π de probabilidad constante ($f(x_1, x_2) =$ constante), figura 14, se tendrá una familia de elipses proyectadas sobre el plano Ox_1x_2 (área sombreada), cuyas ecuaciones están dadas por la (72).

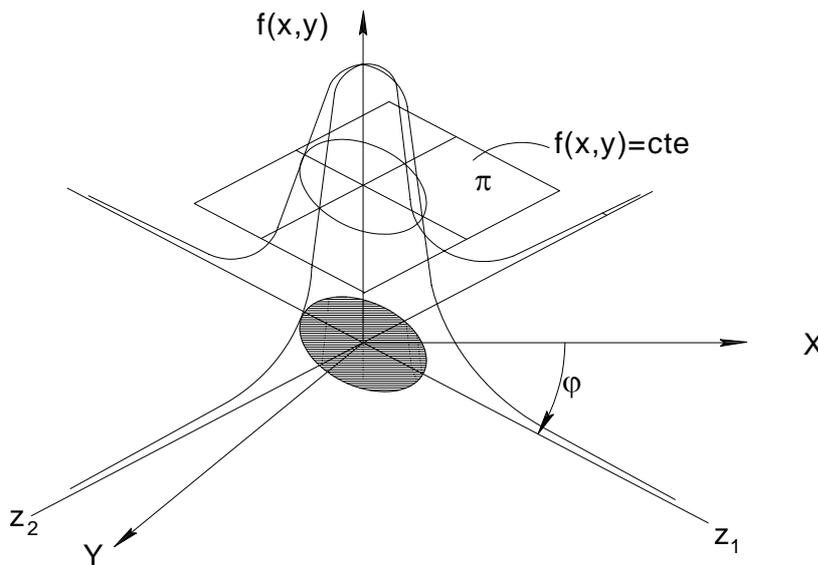


figura 14

Rotando el sistema de coordenadas un ángulo φ , figura 15, se tiene un nuevo sistema de coordenadas Oz_1z_2 , respecto del cual se anula el coeficiente de correlación ρ y la ecuación de la elipse dada en el sistema original Ox_1x_2 por la (72), se expresa en el nuevo sistema coordenado Oz_1z_2 :

$$\frac{z_1^2}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_{z_2}^2} = 2S^2 \quad (73)$$

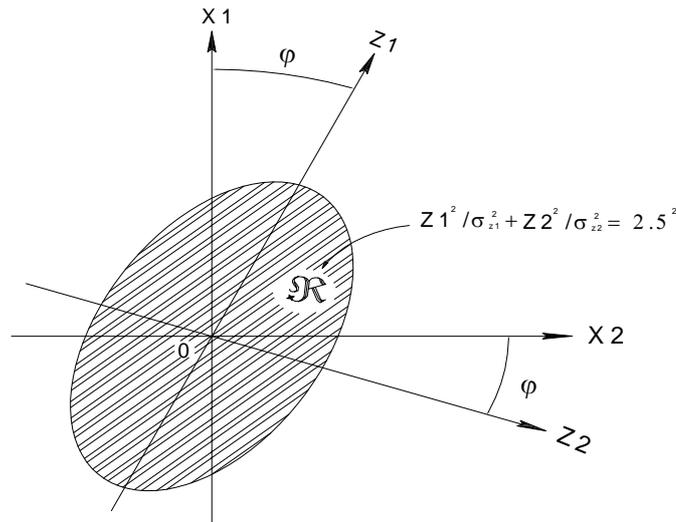


figura 15

La transformación de coordenadas se efectúa por la expresión matricial obtenida del esquema de cosenos:

esquema de cosenos:

φ	x_1	x_2
z_1	$\cos\varphi$	$\text{sen}\varphi$
z_2	$-\text{sen}\varphi$	$\cos\varphi$

transformación de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para calcular la probabilidad de que la variable estocástica conjunta $X = [x_1, x_2]^T$ ocurra (tome valores) dentro de la región de confianza encerrada por la elipse, figuras 14 y 15, resulta mas cómodo trabajar con la expresión (73). Llamando \mathfrak{R} a la región de confianza encerrada por la elipse (73), se tiene:

$$p[(z_1, z_2) \in \mathfrak{R}] = \iint_{\mathfrak{R}} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \iint_{\mathfrak{R}} \frac{1}{2\pi \sigma_{z_1} \sigma_{z_2}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{z_1^2}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_{z_2}^2} \right]} dz_1 dz_2$$

La ecuación de la elipse en el sistema Oz_1z_2 , puede expresarse por:

$$\frac{z_1^2}{(\sqrt{2}\sigma_{z_1})^2} + \frac{z_2^2}{(\sqrt{2}\sigma_{z_2})^2} = S^2 \quad (74)$$

Efectuando el cambio de variables: $u = \frac{z_1}{\sqrt{2}\sigma_{z_1}}$; $v = \frac{z_2}{\sqrt{2}\sigma_{z_2}}$, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\sigma_{z_1}u \quad \rightarrow \quad dz_1 = \sqrt{2}\sigma_{z_1}du \\ z_2 &= \sqrt{2}\sigma_{z_2}v \quad \rightarrow \quad dz_2 = \sqrt{2}\sigma_{z_2}dv \end{aligned}$$

luego:

$$u^2 + v^2 = S^2 \quad (75)$$

La (75) es la ecuación de una circunferencia de radio S, que encierra una región \mathfrak{R}' ; se tiene entonces:

$$\begin{aligned} p[(z_1, z_2) \in \mathfrak{R}] &= p[(u, v) \in \mathfrak{R}'] = \iint_{\mathfrak{R}'} \frac{1}{2\pi\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}} e^{-\frac{1}{2}[2(u^2+v^2)]} \sqrt{2}\sigma_{z_1}du\sqrt{2}\sigma_{z_2}dv \\ p[(u, v) \in \mathfrak{R}'] &= \iint_{\mathfrak{R}'} \frac{2\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}}{2\pi\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}} e^{-[u^2+v^2]} du dv = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathfrak{R}'} e^{-[u^2+v^2]} du dv \end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares: $u = r \cos \theta$; $v = r \operatorname{sen} \theta$, donde el jacobiano de la

$$\text{transformación es: } J \begin{pmatrix} u \\ v \\ r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r$$

entonces:

$$p[(u, v) \in \mathfrak{R}'] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^S e^{-r^2} r dr$$

teniendo en cuenta que: $d(r^2) = 2rdr \quad \rightarrow \quad rdr = \frac{d(r^2)}{2}$, y reemplazando en la anterior:

$$p[(u, v) \in \mathfrak{R}'] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^S e^{-r^2} \frac{dr^2}{2} = \frac{1}{\pi} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^S e^{-r^2} dr^2 = -[e^{-r^2}]_0^S = -(e^{-S^2} - 1) = 1 - e^{-S^2}$$

Puesto que: $p[(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}] = p[(z_1, z_2) \in \mathfrak{R}] = p[(u, v) \in \mathfrak{R}']$, entonces:

$$p[(z_1, z_2) \in \mathfrak{R}] = 1 - e^{-S^2} \quad (76)$$

Si en la (74) dividimos ambos miembros por S^2 :

$$\frac{z_1^2}{(\sqrt{2} S \sigma_{z_1})^2} + \frac{z_2^2}{(\sqrt{2} S \sigma_{z_2})^2} = 1 \quad (77)$$

donde los semiejes A y B de la elipse están dados por:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} S \sigma_{z_1} = c \sigma_{z_1} \\ B &= \sqrt{2} S \sigma_{z_2} = c \sigma_{z_2} \end{aligned} \quad (78)$$

donde
$$c = \sqrt{2} S \quad (79)$$

Para $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\rightarrow c = 1$ y se tiene, de la (77), la ecuación de la “elipse de error estándar”:

$$\frac{z_1^2}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_{z_2}^2} = 1 \quad (80)$$

con semiejes:

$$\begin{aligned} A &= \sigma_{z_1} \\ B &= \sigma_{z_2} \end{aligned} \quad (81)$$

La probabilidad de que la variable estocástica conjunta $X = [x_1, x_2]^T$, tome valores dentro de la elipse de error estándar, es:

$$p[(x_1, x_2) \in \mathfrak{Rest.}] = p[(z_1, z_2) \in \mathfrak{Rest.}] = 1 - e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - 0.6065 = 0.393$$

es decir:
$$p[(x_1, x_2) \in \mathfrak{Rest.}] = 0.393 = 39.3\%$$

donde denotamos con $\mathfrak{Rest.}$ a la región comprendida por la elipse estándar.

Podemos calcular el coeficiente c, (79), para la elipse del 95% de confianza a fin de determinar sus semiejes máximo A y mínimo B, respectivamente. De las (78):

$$A = c \sigma_{z_1} \text{ y } B = c \sigma_{z_2}$$

entonces: $p[(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_{95}] = 1 - e^{-S^2} = 0.95$; $e^{-S^2} = 1 - 0.95 = 0.05$; $-S^2 = \ln 0.05$

$-S^2 = -2.9957$; $S^2 = 2.9957$; $S = 1.7308$ luego: $c = \sqrt{2} S = \sqrt{2} \cdot 1.7308 = 2.448$

Entonces, los semiejes mayor y menor para la elipse de error del 95% de confianza, son:

$$\begin{aligned} A &= 2.448 \sigma_{z_1} \\ B &= 2.448 \sigma_{z_2} \end{aligned} \quad (82)$$

Debemos hallar la forma de determinar σ_{z_1} , σ_{z_2} y φ para calcular los semiejes A y B de la elipse de error y su orientación φ .

De la expresión:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow Z = EX$$

se obtiene la matriz varianza-covarianza de Z en función de la matriz varianza-covarianza de X:

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (83)$$

puesto que $\sigma_{z_1 z_2} = 0$, dado que $\rho = 0$ en el sistema coordinado $Oz_1 z_2$. Efectuando los productos matriciales en la (83):

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1}^2 &= \sigma_{x_1}^2 \cos^2 \varphi + \sigma_{x_2}^2 \text{sen}^2 \varphi + 2\sigma_{x_1 x_2} \text{sen} \varphi \cos \varphi \\ \sigma_{z_2}^2 &= \sigma_{x_1}^2 \text{sen}^2 \varphi + \sigma_{x_2}^2 \cos^2 \varphi - 2\sigma_{x_1 x_2} \text{sen} \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (84)$$

Las (84) permiten calcular σ_{z_1} y σ_{z_2} en función de σ_{x_1} , σ_{x_2} y $\sigma_{x_1 x_2}$. Falta determinar φ : Se tiene también:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1 x_2} \cos^2 \varphi - \sigma_{x_1 x_2} \text{sen}^2 \varphi + \sigma_{x_2}^2 \text{sen} \varphi \cos \varphi - \sigma_{x_1}^2 \text{sen} \varphi \cos \varphi &= 0 \\ \sigma_{x_1 x_2} (\cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi) - (\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2) \text{sen} \varphi \cos \varphi &= 0 \\ \sigma_{x_1 x_2} \cos 2\varphi - (\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2) \frac{1}{2} 2 \text{sen} 2\varphi &= 0 \\ \frac{\text{sen} 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \text{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2} \end{aligned} \quad (85)$$

Entonces:

$$\varphi = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2\sigma_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2} \quad (86)$$

La (86) provee la orientación φ del semieje mayor de la elipse de error, figura 15. Téngase en cuenta que la matriz varianza-covarianza de Z, Σ_Z , es una matriz diagonal, cuyos elementos diagonales son los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz varianza-covarianza Σ_X de la variable aleatoria conjunta X, entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1}^2 = \lambda_1 \quad \rightarrow \quad \sigma_{z_1} &= \sqrt{\lambda_1} \\ \sigma_{z_2}^2 = \lambda_2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{z_2} &= \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (87)$$

donde λ_1 y λ_2 son, respectivamente los valores propios máximo y mínimo de Σ_X . La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - \text{tr}(\Sigma_X)\lambda + \det(\Sigma_X) = 0 \quad (88)$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_{1-2} = \frac{\text{tr}(\Sigma_X) \pm \sqrt{[\text{tr}(\Sigma_X)]^2 - 4 \det(\Sigma_X)}}{2} \quad (89)$$

Entonces los semiejes de la elipse estándar están dados por:

$$A = \sqrt{\lambda_1}; \quad B = \sqrt{\lambda_2} \quad (90)$$

y el rumbo (orientación) de A, está dado por la (86).

Ejemplo 6: Determinar las elipses de error estándar y del 95% para el punto P, siendo el rumbo $\varphi = 30^\circ$ y la distancia $D = 1270$ m (valores aproximados de rumbo y distancia) y $\sigma_\varphi = \pm 5''$, $\sigma_D = \pm 0.05$ m los errores estándar de rumbo y distancia respectivamente.

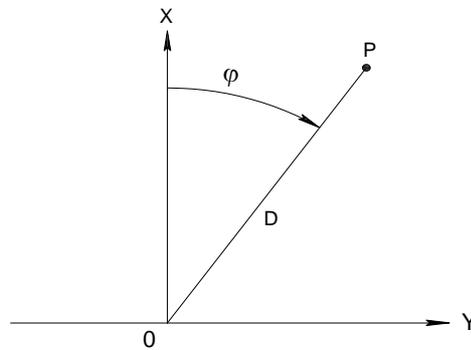


figura 16

Las coordenadas del punto P, son:

$$X = D \cos \varphi = f(D, \varphi)$$

$$Y = D \text{ sen} \varphi = g(D, \varphi)$$

donde f y g son funciones no lineales que deben ser linealizadas. Las diferenciales totales de X e Y, son:

$$dX = \frac{\partial f}{\partial D} dD + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi; \quad dX = X - X^\circ; \quad dD = D - D^\circ$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial D} dD + \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\varphi; \quad dY = Y - Y^\circ; \quad d\varphi = \varphi - \varphi^\circ$$

donde el superíndice "°" indica valor aproximado.

$$X - X^{\circ} = \frac{\partial f}{\partial D}(D - D^{\circ}) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi - \varphi^{\circ})$$

$$Y - Y^{\circ} = \frac{\partial g}{\partial D}(D - D^{\circ}) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\varphi - \varphi^{\circ})$$

$$X = \frac{\partial f}{\partial D}D + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\varphi - \left(\frac{\partial f}{\partial D}D^{\circ} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\varphi^{\circ} \right) + X^{\circ}$$

$$Y = \frac{\partial g}{\partial D}D + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\varphi - \left(\frac{\partial g}{\partial D}D^{\circ} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\varphi^{\circ} \right) + Y^{\circ}$$

expresado matricialmente es:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial D} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial D} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial D} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial D} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{bmatrix}_0 \begin{bmatrix} D^{\circ} \\ \varphi^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^{\circ} \\ Y^{\circ} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow X = AL + C$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial D} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial D} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{\circ} & -D \operatorname{sen} \varphi^{\circ} \\ \operatorname{sen} \varphi^{\circ} & D \cos \varphi^{\circ} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} D \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{\circ} & -D \operatorname{sen} \varphi^{\circ} \\ \operatorname{sen} \varphi^{\circ} & D \cos \varphi^{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\circ} \\ \varphi^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^{\circ} \\ Y^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

El vector C es una constante, entonces la matriz varianza-covarianza de X, es:

$$\Sigma_X = A \Sigma_L A^T$$

Puesto que D y φ son variables estocásticas independientes, $\sigma_{D\varphi} = 0$, entonces:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^{\circ} & -D \operatorname{sen} \varphi^{\circ} \\ \operatorname{sen} \varphi^{\circ} & D \cos \varphi^{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varphi}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi^{\circ} & \operatorname{sen} \varphi^{\circ} \\ -D^{\circ} \operatorname{sen} \varphi^{\circ} & D \cos \varphi^{\circ} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -635 \\ 0.5 & 1099.8523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 5.910^{-10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -635 & 1099.8523 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00210 & 0.00067 \\ 0.00067 & 0.00130 \end{bmatrix}$$

traza: $\operatorname{tr}(\Sigma_X) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 0.0034$; determinante: $\det(\Sigma_X) = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 = 0.000002281$

La ecuación característica: $\lambda^2 - 0.0034 \lambda + 0.000002281 = 0$

raíces: $\lambda_1 = 0.00249$ (max.); $\lambda_2 = 0.00094$ (min.)

Los semiejes de la elipse estándar: $A = \sqrt{\lambda_1} = 0.05 \text{ m}$, $B = \sqrt{\lambda_2} = 0.03 \text{ m}$

El rumbo del semieje mayor: $\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \sigma_{XY}}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \cdot 0.00067}{0.0021 - 0.0013}$

$\varphi = 29^\circ 34' 52''$

La elipse del 95%:

$A = 2.45 \sqrt{\lambda_1} = 0.125 \text{ m}$, $B = 2.45 \sqrt{\lambda_2} = 0.078 \text{ m}$; $\varphi = 29^\circ 34' 52''$

Propagación de los errores de los observables a los parámetros ajustados:

Caso de la red plana: Sea en general:

$$L_b = [l_{bi}]; \quad i = 1, n \quad (91)$$

el vector de observables que distribuye normal multivariable con media μ_{Lb} y matriz varianza-covarianza Σ_{Lb} :

$$L_b \sim N(\mu_{Lb}, \Sigma_{Lb}) \quad (92)$$

En general, las componentes de L_b son variables estocásticas independientes ($\sigma_{l_{bi}l_{bj}} = 0$), entonces la matriz varianza-covarianza de L_b es:

$$\Sigma_{Lb} = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & & & \\ & \sigma_{l_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix} \quad (93)$$

se ha eliminado el subíndice b en las observaciones por simplicidad en la notación.

En (93) σ_{li} $i = 1, n$, son los errores estándar de las observaciones l_{bi} y σ_{li}^2 las correspondientes varianzas. Los pesos de las observaciones son:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{li}^2} \quad (94)$$

donde σ_0^2 es la varianza de la observación de peso 1 (si hacemos $\sigma_0^2 = 1$ se le denomina la varianza a-priori). De la (94).

$$\sigma_{li}^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

entonces:

$$\Sigma_{L_b} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{p_1} & & & \\ & \frac{\sigma_0^2}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sigma_0^2}{p_n} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (95)$$

La matriz varianza-covarianza del vector L_b de las observaciones se expresa, entonces:

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_0^2 P^{-1} = \sigma_0^2 Q_{L_b} \quad (96)$$

donde:

$$Q_{L_b} = P^{-1} \quad (97)$$

se denomina la matriz cofactor del vector L_b de las observaciones.

La solución mínimos cuadrados, en el caso de una red plana vinculada, es:

$$X = N^{-1} A^T P L$$

Así pues, los errores de observación, σ_{li} , contenidos en el vector $L = L_b - L^o$, se propagan al vector X relacionado con los parámetros (coordenadas planas) ajustados según:

$$\begin{aligned} X_j &= X_j^o + dX_j \\ Y_j &= Y_j^o + dY_j; \quad j = 1, m \end{aligned}$$

en forma matricial:

$$Xa = X^o + X \quad (98)$$

donde Xa es el vector de parámetros ajustado.

La matriz varianza-covarianza del vector X solución mínimos cuadrados cuyas componentes son las correcciones diferenciales dX , dY a las coordenadas aproximadas X^o , Y^o , es según la ley de propagación de la varianza-covarianza:

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= (N^{-1} A^T P) \Sigma_L (N^{-1} A^T P)^T \\ \Sigma_x &= N^{-1} A^T P \sigma_0^2 P^{-1} P^T (A^T)^T (N^{-1})^T \end{aligned}$$

Puesto que: $(A^T)^T = A$; $(N^{-1})^T = (N^T)^{-1} = N^{-1}$; $P = P^T$, es tiene:

$$\Sigma_x = \sigma_0^2 N^{-1} A^T (P P^{-1}) P A N^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1} (A^T P A) N^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1} N N^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

$$\Sigma_x = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2 Q_x \quad (99)$$

donde $Q_X = N^{-1}$ es la matriz cofactor de los parámetros (coordenadas ajustadas).

En el caso de la red plana libre, la solución mínimos cuadrados, mínima norma es:

$$X = N^+ A^T P L \quad (100)$$

donde N^+ es la pseudoinversa de Moore-Penrose, con las propiedades siguientes:

- i) $NN^+N = N$
- ii) $N^+NN^+ = N^+$
- iii) N^+N y NN^+ son simétricas
- iv) X es tal que: $V^T P V = \text{mínimo}$ (mínimos cuadrados)
- v) X es tal que: $X^T X = \text{mínimo}$ (mínima norma)
- vi) $\text{tr}(Q_X) = \text{mínimo}$ (mínima traza): $\Sigma(\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{y_j}^2) = \text{mínimo}$

entonces de (100):

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= (N^+ A^T P) \Sigma_L (N^+ A^T P)^T \\ \Sigma_X &= (N^+ A^T P) \sigma_0^2 P^{-1} (N^+ A^T P)^T \\ \Sigma_X &= \sigma_0^2 N^+ A^T (P P^{-1}) P A N^+ \\ \Sigma_X &= \sigma_0^2 N^+ (A^T P A) N^+ \\ \Sigma_X &= \sigma_0^2 N^+ N N^+ \\ \Sigma_X &= \sigma_0^2 N^+ N N^+ = \sigma_0^2 N^+ = \sigma_0^2 Q_X \end{aligned}$$

donde:

$$Q_X = N^+ \quad (101)$$

es la matriz cofactor de las coordenadas planas ajustadas en el caso de una red plana libre. La matriz varianza-covarianza del vector X , es entonces:

$$\Sigma_X = \sigma_0^2 N^+ = \sigma_0^2 Q_X \quad (102)$$

La varianza de la observación de peso 1 se denomina la varianza a priori y generalmente se le asigna valor 1; es decir:

$$\sigma_0^2 = 1 \quad (103)$$

En ese caso los pesos de las observaciones se calculan:

$$p_i = \frac{1}{\sigma_{li}^2} \quad (104)$$

La varianza a posteriori o varianza del ajuste, es un estimador de la varianza a priori y se obtiene por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{\nu} = \frac{[p\nu\nu]}{\nu} \quad (105)$$

donde:

$$\nu = n - \mathfrak{R}(N) = n - m + r \quad (106)$$

Siendo r el defecto de rango ($r = m - \mathfrak{R}(N)$) de la matriz normal N (recordar que $\mathfrak{R}(N) = \mathfrak{R}(A)$).

La varianza a priori es en realidad, la varianza poblacional que se estima con la varianza a posteriori dada en (105) y calculada en función de los residuos a partir de una muestra de tamaño n (número de observaciones).

La prueba chi-cuadrado:

Una de las características importantes del ajuste mínimos cuadrados es la estimación de la varianza de las observaciones de peso 1; es decir la varianza a priori o poblacional, en base a los residuos de las observaciones y a la matriz de los pesos P, (105). En las (105) y (106) ν es la redundancia de la red, n es el número de observaciones y m es el número de parámetros a ajustar, mientras que r es el defecto de rango de A y N y también representa el número de grados de libertad de la red.

La formulación para el estadístico más importante en el ajuste mínimos cuadrados es:

$$\chi^2 = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} = \nu \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad (107)$$

El estadístico (107) tiene distribución chi cuadrado con ν grados de libertad. En base a este estadístico, el test permite establecer si el ajuste está distorsionado o si es correcto. La formulación de las hipótesis es como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Hipótesis nula; } H_0: & \quad \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \\ \text{Hipótesis alternativa; } H_1: & \quad \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \end{aligned} \quad (108)$$

La hipótesis nula H_0 establece que la varianza a priori de peso 1 es estadísticamente igual a la varianza a posteriori de peso 1. Recordemos que la varianza a posteriori de peso 1 es una variable estocástica y que el ajuste nos permite obtener un valor muestral para esta cantidad en función de las observaciones; es decir a partir de la muestra. Ambas varianzas no tienen por que ser numéricamente iguales, pero deben ser estadísticamente iguales en el sentido de que la esperanza de la varianza muestral (a posteriori) es igual a la varianza poblacional (a priori); es decir:

$$E[\hat{\sigma}_0^2] = \sigma_0^2 \quad (109)$$

Si se acepta la hipótesis nula, el ajuste se juzga correcto. Llamando χ^2 al estadístico muestral $\nu \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$, se tiene:

$$\chi^2_{\nu, \frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad (110)$$

donde α es el nivel de significación adoptado, figura 17.

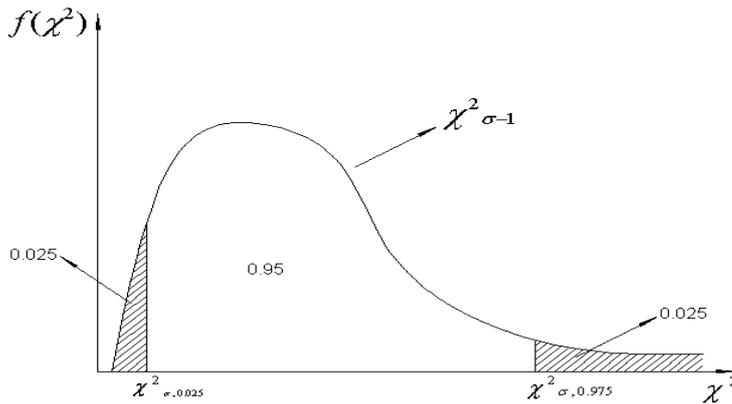


figura 17

De la (110):

$$\begin{aligned} \chi^2_{\nu, \frac{\alpha}{2}} &< \nu \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1}{\chi^2_{\nu, \frac{\alpha}{2}}} &> \frac{\sigma_0^2}{\nu \hat{\sigma}_0^2} > \frac{1}{\chi^2_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}}} \\ \frac{\nu \hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu, \frac{\alpha}{2}}} &> \sigma_0^2 > \frac{\nu \hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}}} \\ \frac{\nu \hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}}} &< \sigma_0^2 < \frac{\nu \hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu, \frac{\alpha}{2}}} \end{aligned} \quad (111)$$

La hipótesis nula se acepta si la varianza a priori (varianza poblacional) se encuentra entre los límites de confianza al nivel $1 - \alpha$, especificados en (111). El nivel de significación α ; es decir la probabilidad de cometer un error tipo I (rechazar la hipótesis nula cuando sea verdadera), se fija generalmente en 0.05 (5%). El nivel de significación α es igual a la suma de las probabilidades en ambas colas de la distribución chi cuadrado, figura 17. En el ajuste mínimos cuadrados se adopta el valor 1 para la varianza a priori de peso 1, entonces de la (111) se tiene:

$$\frac{\nu \hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu, 0.975}} < 1 < \frac{\nu \hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu, 0.025}} \quad (112)$$

La (112) es la condición que debe cumplirse para aceptar la hipótesis nula y decidir que el ajuste es correcto. El rechazo de la hipótesis nula puede ser causado por un inadecuado modelo funcional, modelación incorrecta de errores y pesos o ambos. La presencia de errores groseros en las observaciones, es también una causa frecuente de rechazo de la hipótesis nula. La prueba chi cuadrado es un detector eficiente de errores groseros.

Precisión del posicionamiento de los vértices de una red plana:

La precisión del posicionamiento de los vértices de una red plana ajustada se describe por medio de las elipses de error absolutas correspondientes. Para ello es necesario determinar los parámetros de las elipses en todos y cada uno de los puntos de la red. La matriz varianza-covarianza del vector solución mínimos cuadrados X de una red plana de p puntos es:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X1}^2 & \sigma_{X1Y1} & \cdots & \sigma_{X1Xj} & \sigma_{X1Yj} & \cdots & \sigma_{X1Xp} & \sigma_{X1Yp} \\ & \sigma_{Y1}^2 & \cdots & \sigma_{Y1Xj} & \sigma_{Y1Yj} & \cdots & \sigma_{Y1Xp} & \sigma_{Y1Yp} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & \sigma_{Xj}^2 & \sigma_{XjYj} & \cdots & \sigma_{XjXp} & \sigma_{XjYp} \\ & & & & \sigma_{Yj}^2 & \cdots & \sigma_{YjXp} & \sigma_{YjYp} \\ & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & \sigma_{Xp}^2 & \sigma_{XpYp} \\ \text{sim.} & & & & & & & \sigma_{Yp}^2 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Para el j-ésimo punto de la red, la j-ésima submatriz diagonal 2x2, es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Xj}^2 & \sigma_{XjYj} \\ \text{sim.} & \sigma_{Yj}^2 \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} q_{XjXj} & q_{XjYj} \\ \text{sim.} & q_{YjYj} \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{jj} \quad (114)$$

De la igualdad de matrices en (114) resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{Xj}^2 &= \hat{\sigma}_0^2 q_{XjXj} \\ \sigma_{Yj}^2 &= \hat{\sigma}_0^2 q_{YjYj} \end{aligned} \quad (115)$$

Los errores estándar de las coordenadas ajustadas en la dirección de los ejes coordenados X, Y, son:

$$\begin{aligned} \sigma_{Xj} &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{XjXj}} \\ \sigma_{Yj} &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{YjYj}} \end{aligned} \quad (116)$$

Los parámetros de las elipses de error en cada uno de los vértices de la red, se obtienen de sus correspondientes submatrices diagonales de orden 2x2.

El rumbo (orientación) del semieje mayor A es en el j-ésimo punto:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\varphi) &= \frac{2q_{x_j y_j q}}{q_{x_j x_j} - q_{y_j y_j}} \quad \rightarrow \quad 2\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2q_{x_j y_j q}}{q_{x_j x_j} - q_{y_j y_j}} \\ \varphi &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q_{x_j y_j}}{q_{x_j x_j} - q_{y_j y_j}} \end{aligned} \quad (117)$$

La ecuación característica de la matriz Q_{jj} , es:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(Q_{jj})\lambda + \det(Q_{jj}) = 0 \quad (118)$$

sus soluciones; es decir los valores propios de Q_{jj} :

$$\lambda_{1-2} = \frac{\operatorname{tr}(Q_{jj}) \pm \sqrt{[\operatorname{tr}(Q_{jj})]^2 - 4\det(Q_{jj})}}{2} \quad (119)$$

Los semiejes de la j-ésima elipse estándar:

$$A = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_1}; \quad B = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_2} \quad (120)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(Q) &= q_{xx} + q_{yy} \\ \det(Q) &= q_{xx} q_{yy} - q_{xy}^2 \end{aligned} \quad (121)$$

(se han obviado los subíndices por comodidad en la notación)

La expresión de los valores propios es:

$$\begin{aligned} \lambda_{1-2} &= \frac{q_{xx} + q_{yy} \pm \sqrt{(q_{xx} + q_{yy})^2 - 4(q_{xx} q_{yy} - q_{xy}^2)}}{2} \\ \lambda_{1-2} &= \frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{q_{xx}^2 + q_{yy}^2 + 2q_{xx} q_{yy} - 4q_{xx} q_{yy} + 4q_{xy}^2}{2}} \\ \lambda_{1-2} &= \frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{q_{xx}^2 + q_{yy}^2 - 2q_{xx} q_{yy} + 4q_{xy}^2}{4}} \\ \lambda_{1-2} &= \frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(q_{xx} - q_{yy})^2}{4} + q_{xy}^2} \end{aligned}$$

entonces los semiejes de la j-ésima elipse son:

$$A = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{q_{XX} + q_{YY}}{2} + \sqrt{\frac{(q_{XX} - q_{YY})^2}{4} + q_{XY}^2}} \quad (122)$$

$$B = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{q_{XX} + q_{YY}}{2} - \sqrt{\frac{(q_{XX} - q_{YY})^2}{4} + q_{XY}^2}}$$

Recordemos que la desviación estándar muestral $\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - \mathfrak{R}(A)}}$ estima la desviación estándar poblacional σ_0 . Los semiejes mayor A y menor B, representan el máximo y el mínimo error de posicionamiento del punto P_j, en las direcciones φ y $\varphi + \pi/2$ respectivamente. La figura 18 sintetiza lo expuesto:

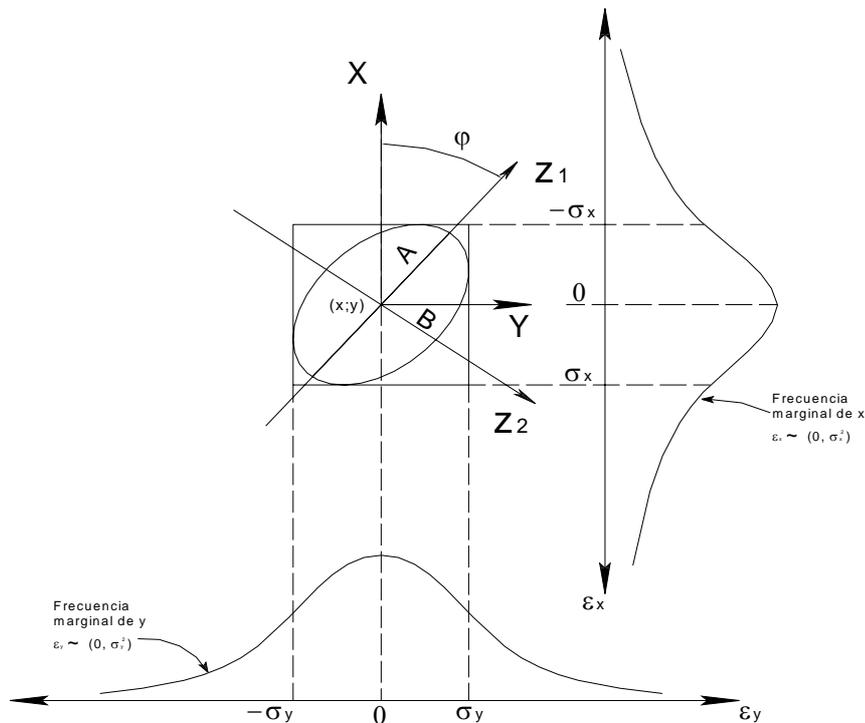


figura 18

El centro de la elipse es el vértice j-ésimo de la red plana cuyas coordenadas ajustadas son $(X, Y)_j$. La elipse de error debe interpretarse como una región de confianza dentro de la cual se encuentran (a un cierto nivel de probabilidad) las coordenadas verdaderas o exactas del punto P_j. Puesto que la forma y tamaño de la elipse de error dependen de la geometría de la red a través de la matriz de diseño A, la interpretación se enriquece si la red y sus elipses se muestran gráficamente.

El error de posicionamiento p de un vértice, punto o estación P_j, está directamente relacionado con la elipse de error tal como lo muestra la figura 19.

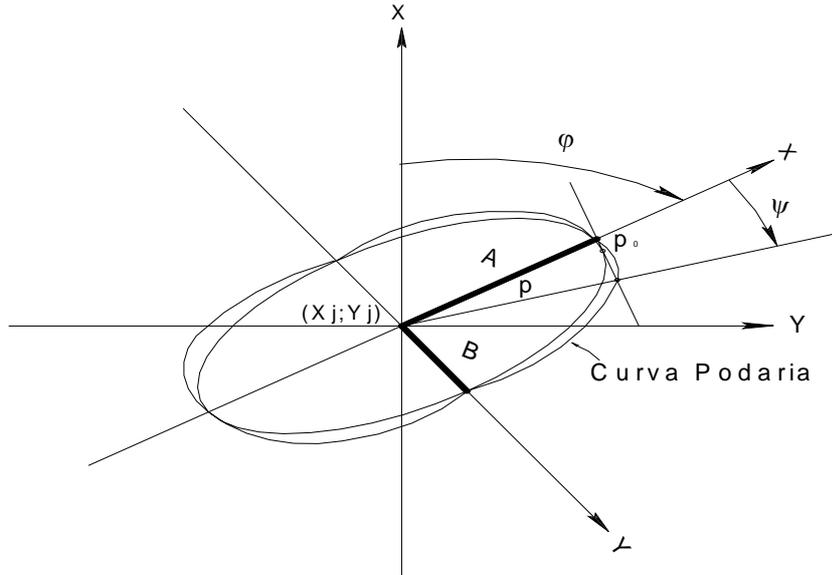


figura 19

Para determinar p en una dirección ψ dada a partir de la dirección del semieje mayor A , se traza una normal a dicha dirección que sea tangente a la elipse de error en el punto P_0 . El error p en la dirección ψ queda definido por el segmento de recta que une el centro de la elipse $(X, Y)_j$ con el punto de intersección de la dirección ψ con la tangente a la elipse en P_0 . Se puede demostrar que p está dado por:

$$p^2 = A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \quad (123)$$

El error de posicionamiento p es el error estándar en la dirección ψ . El extremo del segmento p , para $0 \leq \psi \leq 2\pi$, describe la curva de desviación estándar o curva podaria, figura 19.

Según (123), p^2 es una función de ψ ; es decir: $p^2 = f(\psi)$. La condición necesaria para la existencia de máximo o mínimo de la función f es: $f'(\psi) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(\psi) &= -2A^2 \cos \psi \operatorname{sen} \psi + 2B^2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi = 0 \\ f'(\psi) &= 2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi (B^2 - A^2) = 0 \end{aligned}$$

Puesto que $B^2 - A^2 \neq 0$ $f'(\psi)$ se anula en $\psi = 0$ y $\psi = \pi/2$. El criterio de la derivada segunda decide la existencia de máximo o mínimo:

$$f''(\psi) = 2(B^2 - A^2)(\cos^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \psi)$$

puesto que $B^2 - A^2 < 0$:

si $\psi = 0 \rightarrow f''(\psi) < 0$ en $\psi = 0$ existe máximo y $p = A$.

si $\psi = \pi/2 \rightarrow f''(\psi) > 0$ en $\psi = \pi/2$ existe mínimo y $p = B$.

El máximo valor de p es igual a A .

El mínimo valor de p es igual a B.

El factor de magnificación por el que deben multiplicarse los semiejes A y B de la elipse estándar para obtener elipses correspondientes a otros niveles de probabilidad, depende no solamente del nivel de probabilidad seleccionado sino también de la redundancia ν de la red. Intuitivamente esto tiene sentido puesto que al crecer el número de observaciones n , los errores de posicionamiento decrecen y, en consecuencia, se obtienen elipses de menor tamaño. La justificación matemática de este concepto, basada en la distribución F de Fisher-Snedecor, esta más allá del alcance de este curso. El factor de multiplicación o magnificación se muestra en la siguiente tabla en función de la redundancia y el nivel de probabilidad seleccionado (Leick, A., 1995):

ν	probabilidad: $1-\alpha$		
	95%	98%	99%
1	20.00	50.00	100.00
2	6.16	9.90	14.10
3	4.37	6.14	7.85
4	3.73	4.93	6.00
5	3.40	4.35	5.15
6	3.21	4.01	4.67
8	2.99	3.64	4.16
10	2.86	3.44	3.89
12	2.79	3.32	3.72
15	2.71	3.20	3.57
20	2.64	3.09	3.42
30	2.58	2.99	3.28
50	2.52	2.91	3.18
100	2.49	2.85	3.11
∞	2.45	2.80	3.03

Propagación de los errores de las observaciones en el caso de una red altimétrica:

En el caso de una red plana, los parámetros o coordenadas planas X, Y varían en forma conjunta en una región bidimensional. Si se trata de una red altimétrica, los parámetros o cotas varían en una sola dirección, la vertical. Interesa entonces conocer la propagación de los errores de las observaciones (desniveles) a las cotas ajustadas. Del j -ésimo elemento de la matriz varianza-covarianza, se obtiene el error estándar de la j -ésima cota ajustada:

$$\sigma_{z_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{jj}} \quad (124)$$

Fiabilidad:

La teoría aquí delineada sigue a Baarda (Leick, A. 1995; Chueca Pazos, M. 2000) y está relacionada con la estadística del ajuste.

La configuración apropiada de las figuras geométricas constituyentes de la red, la pequeñez de los residuos y varianzas, la compatibilidad estadística de los estimadores de la varianza de la observación de peso 1 a priori y a posteriori, la compatibilidad de la

red libre y la sometida a constreñimientos externos y la buena configuración de las elipses de error, entre otras, son pruebas de buena calidad de una red. Sin embargo puede no ser suficiente. Así, un error grosero introducido en una observación, influye en todos los residuos de la red y desequilibra su calidad. Se llama fiabilidad interna de la red a su capacidad, expresada numéricamente, de control general y específico de las observaciones junto con la detección y particularización de posibles errores groseros. Del mismo modo, es necesario relacionar los posibles errores no eliminados o remanentes de la red con su influencia en los parámetros ajustados. Se llama entonces fiabilidad externa a la respuesta y sensibilidad de la red ante un nivel de error cualquiera en sus observaciones.

Recordando las expresiones de las matrices varianza-covarianza del vector L_b de las observaciones y del vector X de las incógnitas:

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_0^2 P^{-1} = \sigma_0^2 Q_{L_b} \quad (125)$$

$$\Sigma_X = \sigma_0^2 N^+ = \sigma_0^2 Q_X \quad (126)$$

donde $Q_{L_b} = P^{-1}$ y $Q_X = N^+$ son las matrices cofactor de los vectores L_b y X , respectivamente. Puede hallarse una expresión para la matriz cofactor del vector de los residuos V :

$$\begin{aligned} V &= AX - L \\ V &= A N^+ A^T P L - L \\ V &= (A N^+ A^T P - I) L \\ V &= (A N^+ A^T - P^{-1}) P L \end{aligned} \quad (127)$$

De la ley general de la propagación de la varianza covarianza:

$$\Sigma_V = (A N^+ A^T - P^{-1}) P \Sigma_L [(A N^+ A^T - P^{-1}) P]^T \quad (128)$$

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 (A N^+ A^T - P^{-1}) P P^{-1} P (A N^+ A^T - P^{-1})$$

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 (A N^+ A^T - P^{-1}) (P A N^+ A^T - I)$$

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 [A N^+ (A^T P A) N^+ A^T - A N^+ A^T - A N^+ A^T + P^{-1}]$$

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 [A (N^+ N N^+) A^T - A N^+ A^T - A N^+ A^T + P^{-1}]$$

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 [A N^+ A^T - A N^+ A^T - A N^+ A^T + P^{-1}]$$

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 [-A N^+ A^T + P^{-1}] \quad (129)$$

La matriz cofactor del vector de los residuos es:

$$Q_V = P^{-1} - AN^+A^T \quad (130)$$

El vector de las observaciones ajustadas es:

$$\begin{aligned} L_a &= L_b + V = L_b + AX - L \\ L_a &= L_b + AN^+A^T PL - L \\ L_a &= L_b + AN^+A^T PL - (L_b - L^o) \\ L_a &= AN^+A^T PL + L^o \end{aligned} \quad (131)$$

La matriz varianza-covarianza de L_a es:

$$\Sigma_{L_a} = (AN^+A^T P) \Sigma_L (AN^+A^T P)^T \quad (132)$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 AN^+A^T PP^{-1} PAN^+A^T$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 AN^+ (A^T PA) N^+A^T$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 A (N^+NN^+) A^T$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 A N^+ A^T \quad (133)$$

La matriz cofactor del vector L_a es:

$$Q_{L_a} = AN^+A^T \quad (134)$$

En resumen:

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_0^2 Q_{L_b} = \sigma_0^2 P^{-1}$$

$$\Sigma_X = \sigma_0^2 Q_X = \sigma_0^2 N^+$$

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_0^2 Q_V = \sigma_0^2 (P^{-1} - AN^+A^T)$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 Q_{L_a} = \sigma_0^2 AN^+A^T$$

Multiplicando a derecha ambos miembros de (130):

$$Q_V P = I - AN^+A^T P \quad (135)$$

Puede demostrarse que:

$$\text{tr}(Q_V P) = n - \mathcal{R}(A) = v$$

Denotando por r_i a los elementos de la diagonal principal de $Q_V P$:

$$\text{tr}(Q_V P) = \sum_{i=1}^n r_i = n - \mathcal{R}(A) = v \quad (136)$$

donde v es la redundancia de la red y r_i es el número de redundancia de la i -ésima observación. El número de redundancia r_i , representa la contribución de la i -ésima observación a la redundancia v de la red.

De la (136):

$$r_i = q_i p_i \quad (137)$$

donde q_i, p_i son los elementos de orden i de la diagonal principal de las matrices Q_V y P .

De las (130) y (134):

$$P^{-1} = Q_V + AN^+A^T = Q_V + Q_{La} \quad (138)$$

Los elementos de la diagonal principal de Q_V son todos mayores que cero por tratarse de una matriz cofactor, lo mismo sucede con los elementos diagonales de Q_{La} y teniendo en cuenta la (138):

$$0 \leq q_i \leq \frac{1}{p_i} \quad (139)$$

Multiplicando por p_i ambos miembros de (139):

$$\begin{aligned} 0 \leq q_i p_i \leq 1 \\ 0 \leq r_i \leq 1 \end{aligned} \quad (140)$$

La redundancia de una observación cualquiera es siempre positiva y menor que la unidad, siendo la suma de todas ellas la redundancia general de la red.

De la (138):

$$Q_{La} = P^{-1} - Q_V \quad (141)$$

Si los números de redundancia son cercanos a la unidad, se tendrá:

$$r_i \approx 1 \quad (142)$$

$$q_i p_i \approx 1 \quad (143)$$

$$q_i \approx \frac{1}{p_i} \quad (144)$$

y en (141), con q_{ai} = elemento de orden i de la diagonal principal de Q_{La} :

$$q_{ai} = p_i^{-1} - q_i \approx 0 \quad (145)$$

$$\hat{\sigma}_{ai}^2 = \hat{\sigma}_0^2 q_{ai} \approx 0 \quad (146)$$

Se infiere que si la redundancia del observable se acerca a la unidad, la varianza del observable ajustado, $\hat{\sigma}_{ai}^2$, tenderá a cero. Del mismo modo:

$$\hat{\sigma}_0^2 p_i^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 q_i \quad (147)$$

El ajuste da lugar a varianzas pequeñas en las observaciones ajustadas. Las observaciones ajustadas son claramente más precisas que las iniciales, y se concluye la ventaja de disponer de observaciones con redundancias cercanas a la unidad, que deben buscarse y preferirse.

Al contrario, si los números de redundancia son cercanos a cero:

$$r_i \approx 0 \quad (148)$$

$$q_i r_i \approx 0 \quad (149)$$

$$q_i \approx 0 \quad (150)$$

Las varianzas de los residuos son:

$$\hat{\sigma}_0^2 q_i \approx 0 \quad (151)$$

Las varianzas de las observaciones ajustadas, de la (145), son:

$$\hat{\sigma}_0^2 q_{ai} \approx \hat{\sigma}_0^2 p_i^{-1} \quad (152)$$

Si las expresiones anteriores se extienden y cumplen a lo largo de la red, las varianzas de los residuos resultarán muy pequeñas y las varianzas de los observables ajustados no variaran sensiblemente con respecto a las iniciales. Se habrá logrado muy escasa ventaja en precisión al practicar el ajuste y en consecuencia, deberán evitarse las observaciones de redundancias cercanas a cero.

De la (125):

$$\Sigma_{Lb} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}$$

siendo el peso de la i-ésima observación el elemento del mismo orden p_i de la diagonal principal de la matriz P, que valdrá:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (153)$$

cociente de las varianzas a priori de la observación de peso 1 y de la observación i-ésima.

Pero siendo:

$$\Sigma_v = \hat{\sigma}_0^2 Q_v = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - AN^+ A^T)$$

escribimos la desviación estándar a posteriori del residuo v_i :

$$\hat{\sigma}_{v_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_i} \quad (154)$$

de donde:

$$\hat{\sigma}_{v_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{r_i}{p_i}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{r_i \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{v_i} = \hat{\sigma}_0 \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \sqrt{r_i} \quad (155)$$

Si $\hat{\sigma}_0$ es estadísticamente igual a σ_0 (aceptación de H_0 en la prueba chi-cuadrado) y $r_i \approx 1$, se tiene de la (155):

$$\hat{\sigma}_{v_i} \approx \sigma_i \quad (156)$$

es decir; la desviación estándar estimada de un residuo v_i es igual, en orden de magnitud, a la desviación estándar de la observación l_{bi} correspondiente.

Con lo que se confirma nuevamente a las redundancias r_i particulares de las observaciones como un buen índice de calidad del ajuste, que será tanto mejor cuanto más se aproximen dichos valores a la unidad.

En primera instancia, puede expresarse la redundancia media del ajuste:

$$r_M = \frac{v}{n} = \frac{n - \Re(A)}{n} \quad (157)$$

con la misma interpretación para juzgar al conjunto de la red.

Control de errores groseros:

El control de errores groseros en el ajuste requiere de la formulación de las siguientes hipótesis:

H_0 : Las observaciones no contienen errores groseros.

H_1 : - Las observaciones contienen un error grosero.

- Está localizado en la i -ésima observación.
- Su magnitud es ∇_i .

En el vector de observaciones L_b , la i -ésima observación es errónea, $l_{bi} + \nabla_i$:

$$l_{bi} + \nabla_i - f_i(X^0) = L_i + \nabla_i \quad (158)$$

La i -ésima componente del vector L es: $L_i + \nabla_i$.

De las (127) y (130):

$$V = -Q_V PL \quad (159)$$

$$V = -Q_V P \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i + \nabla_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -Q_V P \left\{ \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \nabla_i \right\}$$

Haciendo $e_i = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]^T$:

$$V = -Q_V P (L - e_i \nabla_i) = -Q_V P L + Q_V P e_i \nabla_i \quad (160)$$

Bajo la hipótesis alternativa H_1 , el vector de residuos se expresa por:

$$\begin{aligned} V_{/H1} &= Q_V P e_i \nabla_i - Q_V P L \\ V_{/H1} &= Q_V P e_i \nabla_i + V \end{aligned} \quad (161)$$

La esperanza matemática del vector V , bajo la hipótesis H_1 , es:

$$E(V_{/H1}) = Q_V P e_i \nabla_i \quad (162)$$

puesto que, por hipótesis, $E(V) = \mathbf{0}$.

La matriz varianza-covarianza, bajo la hipótesis H_1 , es:

$$\Sigma_{V/H1} = \sigma_0^2 Q_V \quad (163)$$

en virtud de que $Q_V P e_i \nabla_i$ es constante.

Entonces $V_{/H1}$ es una variable estocástica conjunta que distribuye normal con media $Q_V P e_i \nabla_i$ y varianza-covarianza $\sigma_0^2 Q_V$; es decir:

$$V_{/H1} \sim N(Q_V P e_i \nabla_i, \sigma_0^2 Q_V) \quad (164)$$

Los residuos individuales v_i son a su vez, variables estocásticas que distribuyen normal con media $q_i p_i \nabla_i$ y varianza $\sigma_0^2 q_i$, es decir:

$$v_i /_{H1} = \sim n(q_i p_i \nabla_i, \sigma_0^2 q_i) \quad (165)$$

Estandarizando la variable $v_i /_{H1}$:

$$\omega_i /_{H1} = \frac{(v_i /_{H1})}{\sigma_{v_i}} \quad (166)$$

y teniendo en cuenta que $\sigma_{v_i} = \sigma_0 \sqrt{q_i}$, podemos escribir:

$$\omega_1 /_{H1} = \frac{(v_i /_{H1})}{\sigma_0 \sqrt{q_i}} \sim n \left(\frac{q_i p_i \nabla_i}{\sigma_0 \sqrt{q_i}}, 1 \right) \quad (167)$$

Multiplicando y dividiendo la esperanza de $\omega_1 /_{H1}$ por $\sqrt{q_i}$:

$$E(\omega_1 /_{H1}) = \frac{\sqrt{q_i} p_i \nabla_i}{\sigma_0} \quad (168)$$

Entonces:

$$\omega_1 /_{H1} = \frac{(v_i /_{H1})}{\sigma_{v_i}} \sim n \left(\frac{\sqrt{q_i} p_i \nabla_i}{\sigma_0}, 1 \right) \quad (169)$$

Bajo la hipótesis nula H_0 :

$$H_0: \omega_0 = \frac{(v_i /_{H0})}{\sigma_{v_i}} \sim n(0,1) \quad (170)$$

El parámetro de no-centralidad, traslación o desplazamiento; es decir, la media de una distribución gaussiana no-central, se denota por δ_i y es:

$$\delta_i = \frac{\nabla_i p_i \sqrt{q_i}}{\sigma_0} \quad (171)$$

Puesto que: $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$

$$\sigma_0 = \sigma_i \sqrt{p_i} \quad (172)$$

Reemplazando (172) en (171):

$$\delta_i = \frac{\nabla_i p_i \sqrt{q_i}}{\sigma_i \sqrt{p_i}} \quad (173)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de (173) por $\sqrt{p_i}$:

$$\delta_i = \frac{\nabla_i p_i \sqrt{p_i q_i}}{\sigma_i p_i} = \frac{\nabla_i \sqrt{p_i q_i}}{\sigma_i}$$

Puesto que $r_i = p_i q_i$, el parámetro de traslación es:

$$\delta_i = \frac{\nabla_i \sqrt{r_i}}{\sigma_i} \quad (174)$$

y el error grosero ∇_i :

$$\nabla_i = \frac{\delta_i \sigma_i}{\sqrt{r_i}} \quad (175)$$

La expresión (175) muestra una vez más la conveniencia de lograr redundancias elevadas, cercanas a la unidad si es posible, a efectos de minimizar ∇_i para el parámetro de traslación δ_i de la i -ésima observación.

Ningún ∇_i ni δ_i será conocido en su verdadera dimensión. Es preciso entonces, aplicar el método estadístico usual de prueba de contraste de errores tipo I y tipo II.

Será necesario establecer el nivel de significación α de rechazo de la hipótesis nula. Generalmente se establece un valor α muy pequeño para asegurar un mínimo de rechazo de observaciones aceptables o errores de tipo I (rechazar H_0 cuando debe ser aceptada).

La probabilidad de cometer un error de tipo I bajo la hipótesis nula, puede expresarse en la forma:

$$P(|\omega_0| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \int_{-t_{\frac{\alpha}{2}}}^{t_{\frac{\alpha}{2}}} n(0,1) dt = 1 - (1 - \alpha) = \alpha \quad (176)$$

obteniéndose $t_{\frac{\alpha}{2}}$ de las tablas de la distribución normal.

El tratamiento del error de tipo II requiere establecer la potencia del test β o probabilidad de aceptación de la hipótesis nula H_0 , cuando debe ser rechazada.

La probabilidad de cometer un error de tipo II será, por tanto, igual a $1 - \beta$. Su expresión es:

$$P(|\omega_1| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \int_{-\infty}^{t_{\frac{\alpha}{2}}} n(\delta_0, 1) dt = 1 - \beta \quad (177)$$

Para fijar ideas y según es de general aplicación, establezcamos:

$$\alpha = 0.001$$

$$\beta = 0.90$$

En la figura 20 se representa la aplicación de las expresiones (176) y (177):

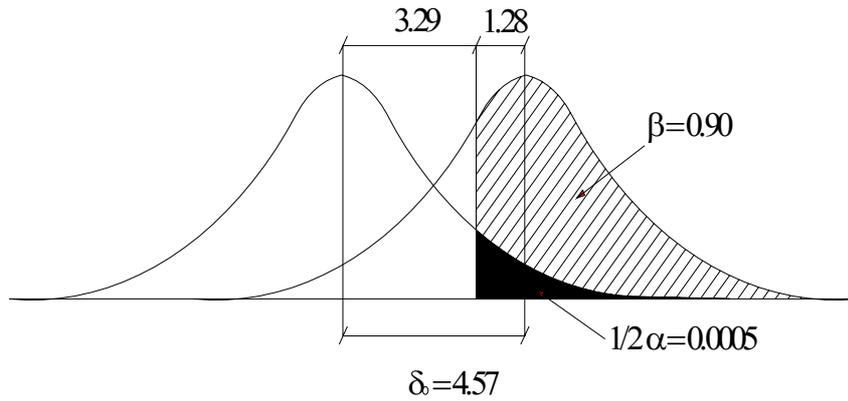


figura 20

En las tablas de distribución normal entramos con el argumento:

$$0.5 - \frac{1}{2}\alpha = 0.5 - 0.0005 = 0.4995$$

obteniéndose:

$$t = 3.29$$

Para que el parámetro de desplazamiento δ_0 de lugar a $\beta = 0.90$, será preciso entrar con el argumento $0.90 - 0.50 = 0.40$, obteniendo $t = 1.28$.

Con lo que resulta inmediatamente:

$$\delta_0 = 3.29 + 1.28 = 4.57$$

A partir de la (165) se obtiene el llamado ω -test debido a Baarda, ampliamente utilizado en la exploración de posibles errores groseros cometidos en el ajuste de redes. La (167) es el test de Baarda bajo la hipótesis alternativa H_1 , que conduce a contrastar una distribución normal con un parámetro de traslación que es proporcional al error grosero ∇_i y sirve, por tanto, para controlarlo. La interpretación completa del test de Baarda con parámetros $\alpha = 0.001$ y $\beta = 0.90$ es inmediata:

- Un residuo estandarizado que cumpla: $\omega_{0_i} = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \geq 3.29$ supone el rechazo de la

hipotesis nula con un nivel de significación de $\alpha = 0.001$. Es decir hay solo 1 por 1000 de probabilidad de que se rechace la observacion y sea correcta. Con fiabilidad 0.999 contendra un error grosero.

- Con el criterio anterior, cualquier error grosero que cumpla:

$$\nabla_{0_i} = \frac{\delta_0 \sigma_i}{\sqrt{r_i}} \geq 4.57 \frac{\sigma_i}{\sqrt{r_i}} \quad (178)$$

será rechazado con una fiabilidad de $\beta = 0.90$. Podrán deslizarse, por tanto, hasta un 10% de errores iguales o superiores al indicado y será preciso admitir como norma general los inferiores al valor establecido en (178).

Siendo conocidos los valores de σ_i y r_i de cada observación puede, pues, analizarse el ajuste suprimiendo sucesivamente y en orden descendente aquellos que excedan el valor establecido para ω_{0i} , realizando un nuevo ajuste después de cada supresión, hasta la aceptación en bloque de todas las observaciones remanentes.

Especialmente importante es contrastar la adecuación de los pesos y errores a priori imputados a las observaciones. Si la precisión supuesta a priori resulta ser muy inferior a la lograda, el número de observaciones rechazadas será elevado y la descripción de la red será irreal. La aceptación de la prueba chi-cuadrado para la varianza a posteriori, es una buena indicación de la adecuación de los pesos y errores a priori de las observaciones.

La elección del parámetro de significación α y la potencia del test β tampoco es arbitraria, mereciendo la pena frecuentemente realizar más de una prueba. Puede empezarse con los valores presentados ($\alpha = 0.001$ y $\beta = 0.90$) y, si el resultado, por cualquier razón no es satisfactorio, ensayar alguna pareja de valores distintos, cuyo cálculo es sencillo. La siguiente tabla ofrece pares α y β junto al parámetro de traslación asociado (Chueca Pazos, 2000):

α	β	δ_0
0.050	0.80	2.80
0.025	0.80	3.10
0.001	0.80	4.12
0.050	0.90	3.24
0.025	0.90	3.52
0.001	0.90	4.57

Fiabilidad interna: Según se vio, se entiende por fiabilidad interna de la red, su capacidad de detección y control de posibles errores groseros en las observaciones. La expresión (178) es utilizable en cuanto el modelo funcional y el estocástico sean conocidos. A través de ella es posible determinar la sensibilidad de la red ante los errores groseros y, por tanto, tomar decisiones lógicas sobre su proyecto y observación, modificando en cuanto sea necesario y siempre dentro de las posibilidades del terreno su configuración inicial hasta su optimización. En consecuencia el estudio de la fiabilidad interna de la red es útil no solamente para conocer la calidad del ajuste realizado, sino para proyectarlo previamente.

Así, tanto en simulación y proyecto como en control de redes, el primer parámetro de control de fiabilidad interna, presente en todas las expresiones deducidas, es el número de redundancia r_i de cada observable.

Se dice que un observable está:

- perfectamente controlado si: $r_i = 1$
- bien controlado si : $0.4 \leq r_i \leq 1$
- débilmente controlado si : $0.1 \leq r_i \leq 0.4$
- mal controlado si : $0 \leq r_i \leq 0.1$
- no está controlado si : $r_i = 0$

Es útil el estudio de homogeneidad de una red comparando las redundancias en distintas zonas con la redundancia media (157). Las zonas de redundancia promedio insatisfactorias sugieren su densificación mediante un suficiente incremento de observaciones. Se utiliza a este efecto el parámetro:

$$\mu_{IN_i} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (179)$$

obtenido directamente de la expresión (178). Independientemente de σ_i , su variación relativa en cuanto menor sea, califica más favorablemente la homogeneidad de la red. Se prefieren valores absolutos pequeños que significan altas redundancias ($r_i \approx 1$). La fiabilidad interna de una red queda, por tanto, definida por los siguientes elementos:

- Los números de redundancia, tanto en cada observación como la redundancia media.
- Los parámetros μ_{IN_i} de homogeneidad de la red.
- Los valores ∇_{0i} deducidos de (178), mínimo error detectable por el test con potencia β y el nivel de significación α , o índices de sensibilidad de la red.

Fiabilidad externa: Una buena y homogénea fiabilidad interna no garantiza automáticamente parámetros fiables. El objetivo de la fiabilidad externa es establecer la influencia de los errores deslizados o no detectados en las observaciones sobre los valores ajustados de los parámetros. Los parámetros estimados en presencia de un error grosero son, para el modelo de las ecuaciones de observación:

$$X = N^+ A^T P (L - e_i \nabla) \quad (180)$$

El efecto de un error grosero en la i -ésima observación es:

$$\nabla X = -N^+ A^T P e_i \nabla_i \quad (181)$$

Las variaciones ∇X se denominan fiabilidad local externa. El error grosero ∇_i afecta, pues, a todos los parámetros. El impacto (influencia) del error mínimo detectable en los parámetros a través del ω -test con potencia β y nivel de significación α , ocasionado por un error grosero ∇_i localizado en la i -ésima observación, es:

$$\nabla X_{0i} = N^+ A^T P e_i \nabla_{0i} \quad (182)$$

Puesto que hay n observaciones, pueden computarse n vectores ∇X_{0i} , mostrando el impacto de cada error mínimo detectable ∇_{0i} sobre los parámetros.

Baarda sugirió la siguiente expresión alternativa:

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla X_{0i}^T N \nabla X_{0i}}{\sigma_0^2} \quad (183)$$

Sustituyendo la expresión (182) en la (183):

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{(N^+ A^T P e_i \nabla_{0i})^T N (N^+ A^T P e_i \nabla_{0i})}{\sigma_0^2}$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla_{0i} e_i^T P A (N^+ N N^+) A^T P e_i \nabla_{0i}}{\sigma_0^2}$$

Puesto que $N^+ N N^+ = N^+$:

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla_{0i} e_i^T P A N^+ A^T P e_i \nabla_{0i}}{\sigma_0^2} \quad (184)$$

De la (130), $A N^+ A^T = I - Q_V P$, entonces:

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla_{0i} e_i^T P (I - Q_V P) e_i \nabla_{0i} \quad (185)$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla_{0i}^2 (e_i^T P e_i - e_i^T P Q_V P e_i) = \frac{1}{\sigma_0^2} \nabla_{0i}^2 (p_i - p_i^2 q_i)$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} p_i \nabla_{0i}^2 (1 - r_i)$$

Y teniendo en cuenta la expresión (178):

$$\lambda_{0i}^2 = \delta_0^2 \sigma_i^2 p_i (1 - r_i) \frac{1}{r_i \sigma_0^2} \quad (186)$$

De la definición de peso, $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, sustituyendo en (186):

$$\lambda_{0i}^2 = \delta_0^2 \sigma_i^2 \sigma_0^2 (1 - r_i) \frac{1}{r_i \sigma_i^2 \sigma_0^2} = \delta_0^2 (1 - r_i) \frac{1}{r_i}$$

Llamamos μ_{EXi} a la cantidad λ_{0i} , entonces:

$$\mu_{EXi} = \delta_0 \sqrt{\frac{1 - r_i}{r_i}} \quad (187)$$

es el parámetro de homogeneidad de la fiabilidad externa, con una interpretación paralela a la de μ_{INI} .

La fiabilidad externa de la red quedará definida por los siguientes elementos:

- Los vectores ∇X_{0i} .
- Los parámetros μ_{EXi} de homogeneidad de la red.

con análoga discusión e interpretación a la antes efectuada.

Síntesis:

Los elementos esenciales del ajuste mínimos cuadrados de una red topográfica son:

- i) el modelo funcional
- ii) el modelo estocástico
- iii) fiabilidad

El ajuste libre produce elipses de error libres de la influencia de los constreñimientos externos (generalmente los puntos fijos). Así, las elipses reflejan fielmente los errores de posicionamiento de los puntos de la red ajustada.

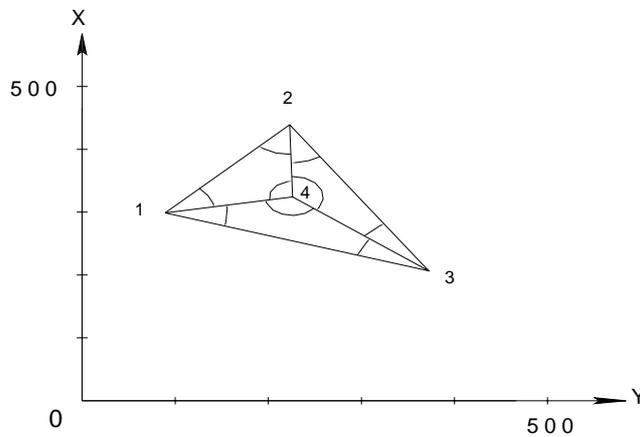
Si se supera exitosamente la prueba chi-cuadrado, puede asegurarse al 95% de confianza que no existen errores groseros detectables en los observables. En caso contrario, serán detectados e identificados en la etapa de fiabilidad interna, mediante el ω -test de Baarda y umbrales definidos por los mínimos errores detectables en cada observación. En la siguiente etapa, los vectores de fiabilidad externa permitirán determinar las influencias de los errores no detectados por el test, sobre los parámetros ajustados. Durante este proceso, juegan un papel fundamental los números de redundancia de los observables, puesto que tanto los parámetros de fiabilidad interna como los de fiabilidad externa dependen de aquellos números. El ajuste libre permite hacer un verdadero control de calidad de una red topográfica.

El ajuste libre exitoso produce también coordenadas ajustadas, cuya geometría deberá integrarse a la geometría de los puntos fijos mediante el ajuste vinculado. Así, una vez ejecutado exitosamente el ajuste vinculado, las coordenadas de todos los puntos de la red estarán referidas al mismo sistema de coordenadas de los puntos fijos o constreñimientos externos.

-----°-----

TRABAJO PRÁCTICO 3: ANALISIS DE REDES TOPOGRAFICAS

E1: Dada la red plana de la figura siguiente:



Datos:

Coordenadas aproximadas

Punto	X°(m)	Y°(m)
1	220	95
2	410	360
3	90	440
4	240	320

ángulos: error estándar de una dirección horizontal: $\hat{\sigma}_{dh} = \pm 5''$

ángulo	codif.	observación
1	2-1-4	24° 37' 32''
2	4-1-3	29° 58' 44''
3	1-3-4	29° 03' 24''
4	4-3-2	26° 33' 59''
5	3-2-4	36° 52' 05''
6	4-2-1	32° 54' 30''
7	2-4-3	116° 33' 46''
8	3-4-1	120° 57' 58''
9	1-4-2	122° 28' 12''

Distancias: error estándar en distancias: $\hat{\sigma}_D = 5\text{ mm} + 5\text{ ppm } D(\text{mm})$

dist.	codif.	observación(m)
1	1-0-2	320.163
2	2-0-3	316.235
3	3-0-1	364.012
4	1-0-4	206.161
5	2-0-4	158.120
6	3-0-4	212.138

- i) Calcular la matriz de los pesos para el ajuste libre.
- ii) Escribir la ecuación de observación para el ángulo 2.
- iii) Escribir la ecuación de observación para la distancia 3.
- iv) Calcular las componentes del vector L correspondientes al ángulo 2 y a la distancia 3.

E2: Ajustar la red libre del ejercicio 1 con la aplicación MATLAB, REDPLN_ALV1:

E3: Ajustar la red plana del ejercicio 1, vinculada a los puntos 1 y 4 considerados como puntos fijos (utilice la aplicación MATLAB, REDPLN_ALV1).

punto	X _F (m)	σ _{X_F} (m)	Y _F (m)	σ _{Y_F} (m)
1 (PF)	217.349	0.0014	101.523	0.0024
4 (PF)	252.463	0.0014	304.672	0.0014

Utilice la aplicación MATLAB, REDPLN_ALV1.

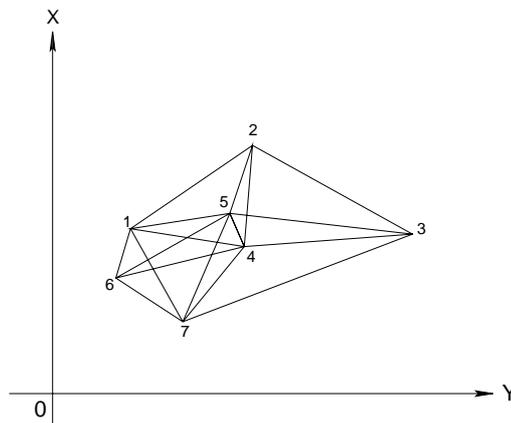
E4: Sea la red altimétrica de la figura del E1, que se ha medido con nivelacion geométrica.

Datos: nivelación geométrica: error estándar de un desnivel: $\sigma_h = \frac{10\text{ mm}}{\sqrt{km}} \sqrt{L(km)}$

desniv.	codif.	observ.(m)	dist.(m)
1	1-2	10.180	320
2	2-3	5.209	316
3	1-3	15.395	364
4	1-4	18.504	206
5	2-4	8.322	158
6	3-4	3.105	212

- i) Plantee las ecuaciones de observación para el ajuste libre y calcule la matriz de los pesos.
- ii) Ejecute el ajuste libre con la aplicación MATLAB, REDALT_A.
- iii) Ejecute el ajuste vinculado al punto 1 donde la cota fija es $Z_1 = 110.341$ m y el error estándar de la cota fija es $\sigma_{Z_1} = 0.002$ m. Utilice la aplicación MATLAB, REDALT_A.

E5: Sea la red plana de la figura:



error estándar de una dirección horizontal: $\sigma_{dh} = \pm 2''$

error estándar en distancia : $\sigma_D = 5\text{mm} + 5 \text{ ppm } D(\text{mm})$

Datos:

Coordenadas aproximadas:

punto	X°(m)	Y°(m)
1	15000	5000
2	16000	17000
3	3000	20000
4	8000	13000
5	13000	11000
6	7500	2000
7	2000	6000

ángulos

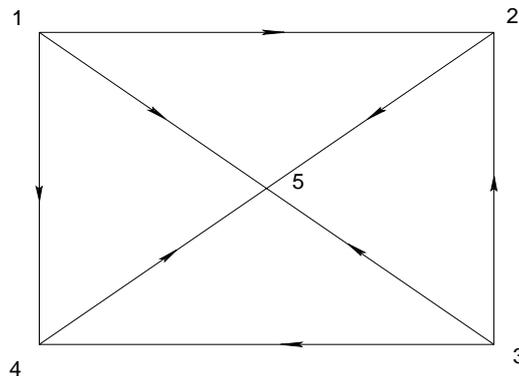
ángulo	codif.	observación
1	3-4-7	105° 36' 26''
2	4-6-7	55° 25' 24''
3	1-6-5	35° 46' 49''
4	4-2-5	37° 01' 31''
5	3-2-4	39° 02' 30''
6	1-5-2	135° 15' 52''
7	4-7-3	36° 14' 14''
8	5-3-2	29° 15' 59''
9	2-1-5	23° 37' 34''
10	4-1-7	42° 48' 06''
11	6-4-1	44° 08' 42''
12	1-7-5	27° 50' 50''

Distancias

dist.	codif.	observac.(m)
1	1-0-6	8109.287
2	1-0-2	12061.786
3	2-0-3	13549.871
4	3-0-7	14025.355
5	7-0-6	6915.454
6	1-0-7	13153.408
7	1-0-4	10683.685
8	1-0-5	6171.609
9	5-0-2	6868.418
10	4-0-2	9402.453
11	5-0-3	13636.349
12	5-0-4	5697.620
13	7-0-5	12210.119
14	6-0-4	10890.332
15	7-0-4	8996.876
16	4-0-3	8608.073
17	6-0-5	10529.538

- i) ejecutar el ajuste libre.
- ii) Si se modifican las coordenadas aproximadas sin deformar significativamente la red ¿cambian los resultados del ajuste libre?
- iii) ¿Qué utilidad tiene la ejecución previa del ajuste libre?
- iv) Seleccione las coordenadas de dos puntos cualesquiera del ajuste libre, considérelas como coordenadas de puntos fijos y ejecute el correspondiente ajuste vinculado. Si se seleccionan otros puntos fijos, ¿qué sucede ahora con el ajuste vinculado?

E6: Sea la red altimétrica de nivelación geométrica de la figura:



Datos:

Cotas aproximadas

$$\text{error estándar de un desnivel: } \sigma_h = \frac{10 \text{ mm}}{\sqrt{km}} \sqrt{L(\text{km})}$$

Punto	Z°(m)
1	100
2	115
3	95
4	113
5	120

desnivel	codif.	observación(m)	distancia(m)
1	1-2	15.174	1497
2	1-5	20.143	993
3	1-4	12.750	1450
4	2-5	5.001	1020
5	4-5	7.413	989
6	3-2	20.152	1398
7	3-5	25.121	1107
8	3-4	17.723	1520

- i) el ajuste libre ¿pasa la prueba chi-cuadrado al 95% de confianza?
- ii) Obtener cotas compensadas y sus errores estándar.
- iii) Obtener desniveles ajustados y verificación de cierre malla por malla.
- iv) Ajuste vinculado: seleccione uno o más puntos altimétricos fijos. Asigne cotas fijas y sus errores estándar.

-----°-----

TEMA 4

**DISEÑO, SIMULACION Y AJUSTE
DE
REDES TOPOGRAFICAS**

Diseño y simulación de redes topográficas:

Un ejemplo muy sencillo servirá como introducción al diseño de redes planas. En la figura 1, se densificará una red por un nuevo punto 4.

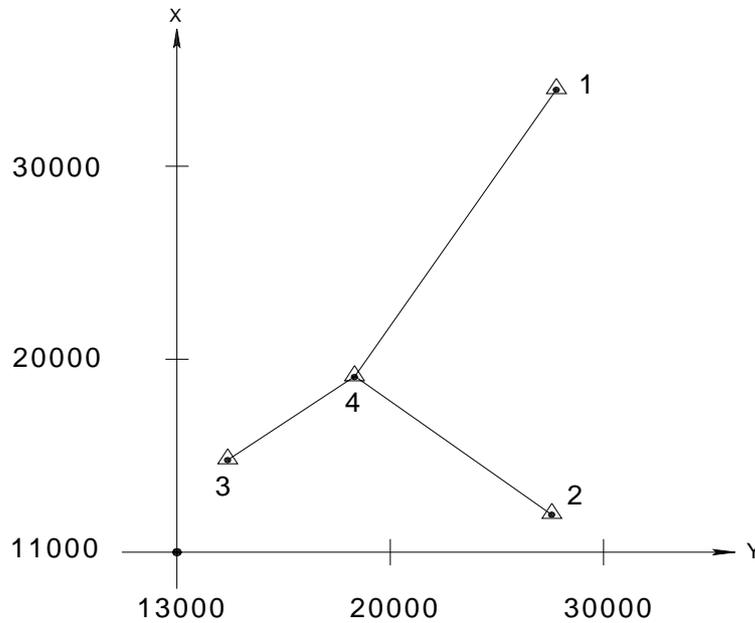


figura 1

Coordenadas aproximadas

punto	X°(m)	Y°(m)
PF 1	31761	26790
PF 2	12991	25882
PF 3	17626	13478
4	20000	20000

Se planifica medir tres distancias s_1 , s_2 y s_3 desde los puntos fijos 1, 2 y 3 respectivamente. La postulación de precisión en el punto 4 esta dada por un círculo de radio igual a 1 centímetro, que deberá contener a la elipse de error estándar ζ con que precisión deberá medirse las distancias s_1 , s_2 y s_3 ?

Esta postulación de precisión esta representada por la matriz identidad como la matriz de criterio:

$$\Sigma_x = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

y la desviación estándar de peso 1, $\sigma_0 = 1$ cm. La relación entre las ecuaciones normales y la matriz de criterio como matriz varianza-covarianza ideal es:

$$N = A^T P A = \Sigma_X^{-1} = E \quad (2)$$

Con $X = [d_x, d_y]^T$ como el vector de parámetros. La matriz de diseño A es:

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_{14} & -\text{sen} \alpha_{14} \\ -\cos \alpha_{24} & -\text{sen} \alpha_{24} \\ -\cos \alpha_{34} & -\text{sen} \alpha_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.891 & -0.454 \\ 0.588 & 0.809 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \quad (3)$$

y la matriz de los pesos de las observaciones:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

de la cual asumimos que las observaciones son no correlacionadas. La (2) puede escribirse:

$$A^T P A = \begin{bmatrix} -0.891 & 0.588 & 0.707 \\ -0.454 & -0.809 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.891 & -0.454 \\ 0.588 & -0.809 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} = \Sigma_X^{-1} = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} 0.794 p_1 + 0.346 p_2 + 0.5 p_3 & 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 \\ 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 & 0.206 p_1 + 0.654 p_2 + 0.5 p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial es lineal en los elementos de P. Se obtienen cuatro ecuaciones lineales, de las cuales dos son idénticas debido a la simetría de las ecuaciones normal y de criterio. Las restantes tres ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 0.794 p_1 + 0.346 p_2 + 0.5 p_3 &= 1 \\ 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 &= 0 \\ 0.206 p_1 + 0.654 p_2 + 0.5 p_3 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

cuya solución (pesos óptimos), $p_1 = 0.511$, $p_2 = 0.974$ y $p_3 = 0.515$ es la solución de la (2).

Se dispone de un distanciómetro cuya fórmula para el error de una observación (error estándar) es:

$$\sigma_s = 5 \text{ mm} + 1 \text{ ppm } S(\text{mm}) \quad (6)$$

entonces se pueden medir las distancias s_1 , s_2 y s_3 con precisiones:

$$\sigma_{s1} = 1.86 \text{ cm}, \sigma_{s2} = 1.42 \text{ cm}, \sigma_{s3} = 1.19 \text{ cm}$$

Asumiendo que observaciones repetidas no son correlacionadas, la desviación estándar de la media aritmética es:

$$\sigma_{\bar{s}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

su peso es:

$$p_{\bar{s}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\bar{s}}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}\right)^2} = n \frac{\sigma_0^2}{\sigma_s^2} \quad (8)$$

con $\sigma_0 = 1$ cm, el número necesario de repeticiones n con respecto a los pesos óptimos, es:

$$n_1 = p_{\bar{s}_1} \sigma_{s1}^2 = p_1 \sigma_{s1}^2 = 0.511(1.86)^2 = 1.76 \quad \rightarrow n_1 = 2$$

$$n_2 = p_{\bar{s}_2} \sigma_{s2}^2 = p_2 \sigma_{s2}^2 = 0.974(1.42)^2 = 1.96 \quad \rightarrow n_2 = 2$$

$$n_3 = p_{\bar{s}_3} \sigma_{s3}^2 = p_3 \sigma_{s3}^2 = 0.515(1.19)^2 = 0.73 \quad \rightarrow n_3 = 1$$

Las repeticiones $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ y $n_3 = 1$, conducen a los errores estándar de las medias aritméticas:

$$\sigma_{\bar{s}_1} = \frac{\sigma_{s1}}{\sqrt{n_1}} = \frac{1.86}{\sqrt{2}} = 1.32 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\bar{s}_2} = \frac{\sigma_{s2}}{\sqrt{n_2}} = \frac{1.42}{\sqrt{2}} = 1.00 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\bar{s}_3} = \frac{\sigma_{s3}}{\sqrt{n_3}} = \frac{1.19}{\sqrt{1}} = 1.19 \text{ cm}$$

y sus pesos:

$$p_{\bar{s}_1} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\bar{s}_1}^2} = \frac{1^2}{(1.32)^2} = 0.57$$

$$p_{\bar{s}_2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\bar{s}_2}^2} = \frac{1^2}{(1.00)^2} = 1.00$$

$$p_{\bar{s}_3} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\bar{s}_3}^2} = \frac{1^2}{(1.19)^2} = 0.71$$

La matriz normal es ahora:

$$N = A^T P A = \begin{bmatrix} -0.891 & 0.588 & 0.707 \\ -0.454 & -0.809 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.57 & & \\ & 1.00 & \\ & & 0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.891 & -0.454 \\ 0.588 & -0.809 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$N = \begin{bmatrix} 1.153 & 0.110 \\ 0.110 & 0.127 \end{bmatrix}$$

La matriz varianza-covarianza de los parámetros es ahora:

$$\Sigma_x = \sigma_0^2 Q_x = N^{-1} = \frac{adj N}{|N|} = \frac{1}{1.2873} \begin{bmatrix} 1.127 & -0.110 \\ -0.110 & 1.153 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88 & -0.08 \\ -0.08 & 0.90 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de N^{-1} es:

$$\lambda^2 - 1.78\lambda + 0.7856 = 0$$

cuya solución $\lambda_1 = 0.97$, $\lambda_2 = 0.81$ conduce a los semiejes mayor y menor de la elipse estándar:

$$A = \sqrt{\lambda_1} = 0.98 \text{ cm} \quad B = \sqrt{\lambda_2} = 0.90 \text{ cm}$$

El rumbo del semieje mayor A es.

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-0.08)}{0.88 - 0.90} = 41.44^\circ$$

La elipse de error estándar de nuestro diseño esta completamente contenida dentro de círculo de error postulado, de radio igual a 1 cm.

Diseño por computadora:

Existen dos métodos que pueden usarse para resolver los problemas de diseño, denominados el método “prueba y error” y el método “analítico”. El método prueba y error se lleva a cabo por simulación en computadora y conduce a un diseño satisfactorio, mientras que el método analítico produce la red de diseño óptimo. Aquí delinearemos solamente el método “prueba y error” por simulación en computadora que si bien conduce a un diseño satisfactorio, la red óptima en sentido matemático, puede lograrse solamente con métodos analíticos.

El proceso prueba y error puede sintetizarse en los siguientes pasos (Shanlong Kuang, 1996):

- i) Especificar los criterios de precisión y fiabilidad (elipses de error y número de redundancias).
- ii) Seleccionar el esquema de observación (estaciones, observaciones y su precisión)

- iii) Computar los valores de las cantidades especificadas como criterios de precisión y fiabilidad
- iv) Si los valores calculados no están próximos a aquellos especificados en i), modificar el esquema de observación agregando o removiendo observaciones, o incrementando o disminuyendo los pesos de las observaciones. Regresar a iii).
- v) Computar el costo de la red y recomenzar en ii) con un esquema completamente diferente (por ejemplo trilateración en lugar de triangulación). Detenerse cuando se haya alcanzado una red satisfactoria, es decir, mínimo costo y precisión aceptable.

La principal ventaja del método prueba y error consiste en que cualquier criterio arbitrario de precisión y fiabilidad, puede usarse para lograr un diseño satisfactorio. No es necesario encuadrar estos criterios en formas matemáticas complejas, indispensables si se utilizan métodos analíticos.

Volvamos al ejemplo sencillo que se utilizó como introducción al diseño de redes planas. Se utilizó la aplicación MATLAB, REDPLN_D. A las coordenadas X, Y de los puntos 1, 2 y 3 de la red existente, se les asignó errores pequeños ($\sigma_X = \sigma_Y = 0.001$ m) y gran peso ($p_X = p_Y = 1000000$) a fin de considerarlos puntos fijos. Se especifica la elipse de error estándar en el punto 4 con semieje mayor $A < 1$ cm y se dispone de un distanciómetro cuya fórmula para el error de una observación (error estándar) es:

$$\sigma_S = 5 \text{ mm} + 1 \text{ ppm } S \text{ (mm)}$$

Para el esquema de la figura 1, se logra la elipse de error estándar en el punto 4 con los siguientes parámetros:

punto	ϕ°	A(m)	B(m)	excentricidad	área (cm2)
4	-17.27	0.0134	0.010	0.3975	4.38

La elipse estándar obtenida, no entra dentro de las especificaciones de precisión; es decir, no esta contenida en el círculo postulado de radio igual a 1 cm.

Fiabilidad interna:

Índices de sensibilidad: $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.80$; $\delta_0 = 2.80$

Obs.	ri	$ \nabla_{0i} $ (m)
1	0.5912	0.068
2	0.1604	0.099
3	0.2442	0.068

Fiabilidad externa:

Transferencia a coordenadas: Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1 (distancia 1-4):

Punto 4: ISX = -0.027 m ISY = -0.008 m

Observable 2 (distancia 2-4):

Punto 4: ISX = 0.072 m ISY = -0.044 m

Observable 3 (distancia 3-4):

Punto 4: ISX = 0.019 m ISY = 0.047 m

ISX y ISY son las influencias sobre las coordenadas compensadas del punto 4 de los errores no detectados por el ω -test de Baarda; es decir aquellos que se mantendrían por debajo de los mínimos errores detectados $|\nabla_{0i}|$.

El diseño no resulta satisfactorio. Intentaremos ahora con observaciones dobles.

El error estándar de la media aritmética de cada distancia observada dos veces es:

$$\sigma_{\bar{s}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (5 \text{ mm} + 1 \text{ ppm } S (\text{mm})) = 3.53 + 0.71 \text{ ppm } S (\text{mm})$$

Los parámetros de la elipse estándar son ahora:

punto	φ°	A(m)	B(m)	excentricidad	área (cm ²)
4	-17.29	0.0095	0.0074	0.3969	2.21

La elipse estándar del punto 4 entra ahora dentro de las especificaciones de precisión postuladas; es decir, está contenida dentro del círculo de radio igual a 1 cm.

Fiabilidad interna:

Índices de sensibilidad: $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.80$; $\delta_0 = 2.80$

Obs.	ri	$ \nabla_{0i} $ (m)
1	0.5890	0.048
2	0.1597	0.070
3	0.2429	0.048

Fiabilidad externa:

Transferencia a coordenadas: Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1 (distancia 1-4):

Punto 4: ISX = -0.019m ISY = -0.006 m

Observable 2 (distancia 2-4):

Punto 4: ISX = 0.051 m ISY = -0.031 m

Observable 3 (distancia 3-4):

Punto 4: ISX = 0.013 m ISY = 0.034 m

En el diseño con observaciones duplicadas no solamente se satisface la precisión especificada ($A < 1$ cm), sino que disminuyeron los mínimos errores detectables en las observaciones y su influencia sobre las coordenadas del punto 4

En el diseño prueba y error de redes alimétricas se procede siguiendo los cinco pasos anteriores, salvo que las precisiones se especifican para los errores estándar de las cotas, ya que las elipses de error son propias de las redes planas exclusivamente.

Simulación:

Una vez obtenido el diseño satisfactorio por prueba y error, en ciertos casos resulta conveniente efectuar la simulación de la red, es decir, simular las observaciones y ajustar la red con las observaciones simuladas para tener una respuesta a priori del ajuste de la red real. Para ello se definen parámetros (coordenadas o cotas) exactos con lo que se logra una red ideal calculando observables también ideales (sin errores). Si ahora se “descorrigen” los observables ideales o exactos afectándolos de los errores adoptados en la etapa de diseño, se obtienen las observaciones simuladas. Los errores introducidos deberán estar comprendidos en el rango -2.5σ y $+2.5\sigma$ y sus magnitudes y signos tendrán que ser tales que los errores distribuyan según la ley normal de Gauss, donde σ es la desviación estándar adoptada para las observaciones en el diseño de la red. Luego se procede a efectuar el ajuste mínimos cuadrados como si se tratase de una red observada realmente.

Ejemplo 1: Sean cuatro puntos del terreno cuyas coordenadas planas aproximadas están dadas en la siguiente tabla:

punto	X°(m)	Y°(m)
1	200	100
2	500	300
3	250	600
4	100	400

Vamos a diseñar una red plana libre de la influencia de constreñimientos externos, que satisfaga el siguiente postulado de precisión:

El semeje mayor A de las elipses de error del 95% de confianza, no debe superar el valor de dos centímetros, es decir: $A \leq 2$ cm.

Se dispone de una estación total con las siguientes características:

Error estándar de una dirección horizontal: $\sigma_{dh} = 5''$

Error estándar en distancias: $\sigma_S = 5 \text{ mm} + 1 \text{ ppm S (mm)}$

Diseño 1: planificamos medir 6 ángulos y dos distancias, codificadas en la siguiente tabla:

ang.	códigos ángulos
1	2-1-4
2	4-2-1
3	3-2-4
4	4-3-2
5	2-4-3
6	1-4-2

dist.	códigos distancias
1	1-0-3
2	2-0-4

En este caso el número de observaciones es $n = 8$, el número de parámetros (coordenadas planas) es $m = 8$ y el número de grados de libertad es $r = 3$, entonces la redundancia de la red es $\nu = n - m + r = 8 - 8 + 3 = 3$.

Usamos la aplicación MATLAB, REDPLN_D y el método “prueba y error” que produce los siguientes resultados:

Errores estándar de las coordenadas y errores estándar de posición medios:

punto	σ_x (m)	σ_y (m)	EPM	2EPM
1	0.0042	0.0044	0.0061	0.012
2	0.0045	0.0043	0.0059	0.012
3	0.0041	0.0043	0.0059	0.012
4	0.0033	0.0058	0.0067	0.013

El error de posición medio $EPM = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ contiene del 64% al 77% de probabilidad, mientras que la medida relacionada $2EPM = 2 \text{ EPM}$ contiene del 95% al 98% de probabilidad.

Elipses de error del 95% de confianza (FM = 6.16):

punto	φ°	A (m)	B (m)	excentr.	área (cm ²)
1	-29.22	0.0273	0.0213	0.1125	22.08
2	25.50	0.0279	0.0259	0.1406	22.68
3	-39.98	0.0279	0.0236	0.2853	20.67
4	-12.00	0.0360	0.0190	0.7203	21.55

$$\Sigma = 1.2587 \quad \Sigma = 86.98$$

El diseño no resulta satisfactorio puesto que las elipses de los puntos no cumplen con el postulado de precisión. Veamos, sin embargo, los parámetros de fiabilidad:

Fiabilidad:

Índices de sensibilidad de la red: $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.80$, $\delta_0 = 2.80$

obs.	ángulo	r_i	$ \nabla_{0i} ''$	μ_{INi}	μ_{EXi}
1	2-1-4	0.4742	28.8	4.0661	2.9482
2	4-2-1	0.4114	26.7	4.3517	3.3491
3	3-2-4	0.4371	25.9	4.2351	3.1773
4	4-3-2	0.4610	29.2	4.1239	3.0278
5	2-4-3	0.3167	30.5	4.9755	4.1126
6	1-4-2	0.3281	29.9	4.8883	4.0070
obs.	distancia	r_i	$ \nabla_{0i} $ (m)	μ_{INi}	μ_{EXi}
1	1-0-3	0.2471	0.042	5.6328	4.8872
2	2-0-4	0.3243	0.035	4.9168	4.0416

$$\Sigma r_i = 3$$

$$rm = 0.3750$$

Transferencia a coordenadas. Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1: (ángulo 2-1-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.004	0.001	0.000	-0.005
ISY (m):	0.009	-0.007	0.005	-0.007

Observable 2: (ángulo 4-2-1)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.010	-0.010	0.001	0.000
ISY (m):	-0.007	-0.002	0.000	0.010

Observable 3: (ángulo 3-2-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.002	-0.008	0.011	-0.004
ISY (m):	0.000	-0.004	0.006	-0.010

Observable 4: (ángulo 4-3-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.002	0.003	0.000	-0.001
ISY (m):	-0.004	0.006	-0.009	-0.008

Observable 5: (ángulo 2-4-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.002	0.005	-0.013	0.010
ISY (m):	0.000	-0.008	0.003	0.005

Observable 6: (ángulo 1-4-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.015	0.009	-0.002	0.008
ISY (m):	-0.001	0.008	0.000	-0.007

Observable 7: (distancia 1-0-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.002	0.005	0.003	-0.006
ISY (m):	0.016	0.000	0.016	0.001

Observable 8: (distancia 2-0-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.003	0.015	-0.004	-0.008
ISY (m):	-0.005	-0.004	0.006	0.003

En los puntos que están sobremarcados, el módulo del vector de influencias $\sqrt{ISX^2 + ISY^2}$ supera a 2EPM. Esto significa que los potenciales errores no detectados por el ω -test de Baarda, influirían en forma perjudicial sobre las coordenadas ajustadas en los puntos identificados. Es necesario, pues, intentar un nuevo diseño.

Diseño2: Incluimos la medición de las distancias 2-0-1 y 2-0-3. El número de observaciones es ahora $n = 10$, el número de parámetros (coordenadas planas) es $m = 8$

y el número de grados de libertad es $r = 3$, entonces la redundancia de la red es $v = n - m + r = 10 - 8 + 3 = 5$. Los resultados son los siguientes:

Errores estándar de las coordenadas y errores estándar de posición medios:

punto	σ_X (m)	σ_Y (m)	EPM	2EPM
1	0.0030	0.0041	0.0051	0.0100
2	0.0031	0.0028	0.0042	0.0083
3	0.0036	0.0039	0.0053	0.0110
4	0.0033	0.0056	0.0065	0.0130

Elipses de error del 95% de confianza (FM = 3.40):

punto	φ°	A (m)	B (m)	excentr.	área (cm ²)
1	19.57	0.0145	0.0094	0.5796	4.26
2	-11.20	0.0106	0.0095	0.1996	3.15
3	-40.11	0.0154	0.0091	0.6492	4.39
4	-12.81	0.0195	0.0104	0.7135	6.40

$$\Sigma = 2.1419 \quad \Sigma = 18.21$$

El nuevo diseño cumple con el postulado de precisión, puesto que los semiejes mayores de las elipses de todos los puntos son ahora menores o iguales que 2 cm. Si bien la suma de las excentricidades de las elipses es ahora levemente mayor que en el diseño anterior, la suma de áreas de incertidumbre resulta mucho menor en el diseño 2.

Veamos ahora los parámetros de:

Fiabilidad:

obs.	ángulo	r_i	$ \nabla_{0i} ''$	μ_{INi}	μ_{EXi}
1	2-1-4	0.5912	25.8	3.6416	2.3284
2	4-2-1	0.4979	24.3	3.9681	2.8117
3	3-2-4	0.4973	24.3	3.9705	2.8149
4	4-3-2	0.5601	26.5	3.7413	2.4815
5	2-4-3	0.4984	24.3	3.9661	2.8089
6	1-4-2	0.6031	22.1	3.6055	2.7414
obs.	distancia	r_i	$ \nabla_{0i} $ (m)	μ_{INi}	μ_{EXi}
1	2-0-1	0.3859	0.031	4.5073	3.5323
2	2-0-4	0.5492	0.027	3.7783	2.5369
3	2-0-3	0.4522	0.029	4.1638	3.0817
4	1-0-3	0.3647	0.035	4.6365	3.6958

$$\Sigma r_i = 5$$

$$r m = 0.5$$

Se observa que han aumentado los números de redundancia y han disminuido los mínimos errores detectables, respecto del diseño anterior. Los parámetros de homogeneidad interna y externa indican que la red es homogénea en toda su extensión.

Transferencia a coordenadas: Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1: (ángulo 2-1-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.000	0.002	0.002	-0.004
ISY (m):	0.007	-0.002	0.003	-0.007

Observable 2: (ángulo 4-2-1)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.006	-0.006	0.000	0.000
ISY (m):	-0.008	-0.001	0.001	0.008

Observable 3: (ángulo 3-2-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.000	-0.005	0.008	-0.004
ISY (m):	-0.001	0.002	0.007	-0.009

Observable 4: (ángulo 4-3-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.001	0.002	0.000	-0.001
ISY (m):	-0.003	0.001	-0.007	0.009

Observable 5: (ángulo 2-4-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.002	0.001	-0.007	0.008
ISY (m):	0.000	-0.003	0.000	0.003

Observable 6: (ángulo 1-4-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.006	0.002	-0.002	0.006
ISY (m):	0.002	0.003	0.000	-0.004

Observable 7: (distancia 2-0-1)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.008	0.008	0.001	0.000
ISY (m):	-0.004	0.006	0.000	-0.002

Observable 8: (distancia 2-0-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.002	0.006	0.000	-0.006
ISY (m):	-0.002	-0.002	0.002	0.002

Observable 9: (distancia 2-0-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.001	0.005	-0.006	0.000
ISY (m):	-0.001	-0.007	0.005	0.003

Observable 10: (distancia 1-0-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.001	-0.001	0.004	-0.005
ISY (m):	-0.011	0.000	0.011	0.004

Solamente el observable 7 (distancia 2-0-1) tiene sobre el punto 2 una influencia total IT, mayor que 2EPM ($IT = \sqrt{ISX^2 + ISY^2} > 2EPM$). El diseño es satisfactorio.

Vamos a simular la medición de la red siguiendo al diseño2, con el objeto de anticipar la respuesta del ajuste de la red real. Se comienza dando unas coordenadas exactas o ideales y las consideraremos como las “coordenadas verdaderas”. A partir de ellas se determinan los ángulos y lados exactos, los que luego se “descorrigen” simulando la medición para luego realizar el ajuste. Las coordenadas exactas son:

punto	X (m)	Y (m)
1	198.279	105.038
2	506.241	295.772
3	246.651	607.119
4	97.892	395.095

número	ángulo exacto	número	lado exacto
1	77° 20' 01.38"	1	362.396 m
2	45° 25' 17.56"	2	420.430 m
3	36° 29' 43.79"	3	405.484 m
4	74° 53' 37.36"	4	504.406 m
5	69° 36' 38.86"		
6	57° 14' 41.06"		

Simulamos la medición introduciendo errores que tengan distribución gaussiana, de tal forma que el 68% de ellos pertenezca al intervalo $[-\sigma, +\sigma]$ y el resto no supere el intervalo $[-3\sigma, +3\sigma]$, donde σ es el error estándar de los instrumentos de medición.

Los ángulos y lados simulados son:

número	ángulo simulado	número	lado s
1	77° 20' 04"	1	362.397 m
2	45° 25' 15"	2	420.423m
3	36° 29' 48"	3	405.491 m
4	74° 53' 35"	4	504.396 m
5	69° 36' 49"		
6	57° 14' 30"		

Procedemos a ejecutar el ajuste libre con la aplicación MATLAB, REDPLN_A considerando, como en el diseño, ángulos correlacionados. Las coordenadas aproximadas son las mismas que se utilizaron en el diseño.

El número de observaciones es $n = 10$, el número de parámetros es $m = 8$ y el número de grados de libertad es $r = 3$, entonces la redundancia de la red es $v = 10 - 8 + 3 = 5$.

La varianza a posteriori $\hat{\sigma}_0^2 = 0.8619$ supera la prueba chi-cuadrado en la tercera iteración, $\chi^2_{5, 0.025} = 0.831$, $\chi^2_{5, 0.975} = 12.8$.

Coordenadas ajustadas y sus errores estándar:

punto	X(m)	σ_X (m)	Y(m)	σ_Y (m)	EPM	2EPM
1	198.2203	0.0028	104.3516	0.0038	0.0047	0.0094
2	506.5537	0.0029	294.7650	0.0026	0.0039	0.0078
3	247.0975	0.0033	606.3785	0.0037	0.0050	0.0100
4	98.1285	0.0030	394.5049	0.0054	0.0062	0.0124
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Elipses de error del 95% de confianza (FM = 3.40):

punto	φ°	A (m)	B (m)	excentr.	área (cm ²)
1	21.45	0.0136	0.0088	0.5813	3.76
2	-13.39	0.0099	0.0085	0.1900	2.74
3	-38.30	0.0145	0.0085	0.6564	3.87
4	-11.03	0.0185	0.0097	0.7251	5.64

$$\Sigma = 2.1528 \quad \Sigma = 16.01$$

Fiabilidad:

Índices de sensibilidad de la red: $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.80$, $\delta_0 = 2.80$

obs.	ángulo	v_i''	ω_i	r_i	$ \nabla_{0i} ''$	μ_{INi}	μ_{EXi}
1	2-1-4	1.25	0.2496	0.5778	26.0	3.6836	2.3935
2	4-2-1	0.84	0.1877	0.5057	24.1	3.9374	2.7682
3	3-2-4	-5.55	-1.2453	0.5073	24.1	3.3912	2.7594
4	4-3-2	-1.32	-0.2652	0.5752	26.1	3.6919	2.4062
5	2-4-3	-5.12	-1.0154	0.5010	24.2	3.9558	2.7944
6	1-4-2	8.92	1.6647	0.6008	22.1	3.6124	2.2688
obs.	distancia	v_i (m)	ω_i	r_i	$ \nabla_{0i} $ (m)	μ_{INi}	μ_{EXi}
1	2-0-1	-0.007	-1.7040	0.3845	0.031	4.5155	3.5426
2	2-0-4	0.004	0.9066	0.5467	0.027	3.7869	2.5496
3	2-0-3	-0.003	-0.7182	0.4455	0.029	4.1950	3.1238
4	1-0-3	0.005	1.1076	0.3554	0.035	4.6968	3.7709

$$\Sigma r_i = 5$$

$$rm = 0.5$$

De la tabla “t” de Student: $t_{5, 0.975} = 2.57$. Los parámetros de Baarda se mantienen por debajo de este valor para todas las observaciones; es decir $|\omega_i| < t_{5, 0.975} = 2.57$. El ω -

test de Baarda no ha detectado errores groseros en las “observaciones”, en consecuencia no se rechaza ninguna de ellas.

Transferencia a coordenadas: Vectores de fiabilidad externa:

Vamos a estudiar ahora la influencia de los errores no detectados por el ω -test de Baarda sobre las coordenadas ajustadas:

Observable 1: (ángulo 2-1-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.000	0.002	0.002	-0.004
ISY (m):	0.007	-0.002	0.003	-0.008

Observable 2: (ángulo 4-2-1)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.006	-0.005	0.000	-0.001
ISY (m):	-0.009	-0.001	0.001	0.008

Observable 3: (ángulo 3-2-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.000	-0.004	0.008	-0.004
ISY (m):	-0.001	0.003	0.007	-0.009

Observable 4: (ángulo 4-3-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.001	0.002	-0.002	-0.001
ISY (m):	-0.003	0.001	-0.007	0.009

Observable 5: (ángulo 2-4-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.002	0.001	-0.007	0.008
ISY (m):	0.000	-0.003	-0.001	0.003

Observable 6: (ángulo 1-4-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.006	0.002	-0.002	0.006
ISY (m):	0.002	0.002	0.000	-0.004

Observable 7: (distancia 2-0-1)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	-0.009	0.008	0.001	0.000
ISY (m):	-0.004	0.006	0.000	-0.002

Observable 8: (distancia 2-0-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.002	0.006	-0.001	-0.006
ISY (m):	-0.002	-0.002	0.001	0.002

Observable 9: (distancia 2-0-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.001	0.005	-0.006	0.000
ISY (m):	-0.001	-0.007	0.005	0.002

Observable 10: (distancia 1-0-3)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISX (m):	0.001	-0.001	0.004	-0.005
ISY (m):	-0.011	0.000	0.011	0.000

En los puntos 1, 2 y 3, los observables 2, 7, 8, 9 y 10 ejercen una influencia total IT mayor que 2EPM, donde la diferencia no supera el valor de 2 milímetros.

Observables ajustados y sus errores estándar:

ángulo	obsev. ajustado	err. est.™
2-1-4	77° 23' 05.25™	4.3
4-2-1	45° 25' 15.84™	4.8
3-2-4	36° 29' 42.4™	4.8
4-3-2	74° 53' 33.7™	4.3
2-4-3	68° 36' 43.9™	4.2
1-4-2	57° 14' 38.9™	3.8
distancia	observ. ajustado	err.est.(m)
2-0-1	362.390 m	0.005
2-0-4	420.274 m	0.004
2-0-3	405.488 m	0.005
1-0-3	504.401 m	0.006

El ajuste libre de la red simulada acuerda sensiblemente con los resultados del diseño. Esta es la respuesta esperada en el ajuste libre de la red real.

En el ajuste vinculado, fijamos las coordenadas de los puntos 1 y 3 del ajuste libre con sus errores estándar:

PF	X (m)	σ_X (m)	Y (m)	σ_Y (m)
1	198.220	0.003	104.352	0.004
3	247.098	0.003	606.378	0.004

El número de observaciones es $n = 14$, el número de parámetros es $m = 8$ y el número de grados de libertad es $r = 0$, entonces la redundancia de la red es $\nu = 14 - 8 = 6$.

La varianza a posteriori $\hat{\sigma}_0^2 = 0.7198$ supera la prueba chi-cuadrado en la tercera iteración, $\chi^2_{6, 0.025} = 1.24$, $\chi^2_{6, 0.975} = 14.4$.

Coordenadas ajustadas y sus errores estándar:

punto	X (m)	σ_X (m)	Y (m)	σ_Y (m)	EPM	2EPM
1 (PF)	198.220	0.002	104.352	0.003	0.0036	0.0072
2	506.554	0.004	294.764	0.006	0.0072	0.0144
3 (PF)	247.098	0.002	606.378	0.003	0.0036	0.0072
4	98.129	0.004	394.505	0.008	0.0089	0.0178

Elipses de error del 95% de confianza (FM = 3.40):

punto	φ°	A (m)	B (m)	excentr.	área (cm ²)
1 (PF)	3.52	0.0096	0.0082	0.1920	2.47
2	-11.80	0.0185	0.0139	0.4355	8.08
3 (PF)	3.52	0.0096	0.0082	0.1920	2.47
4	-11.94	0.0269	0.0133	0.7555	11.24

$$\Sigma = 1.5750 \quad \Sigma = 24.26$$

Las elipses de error del ajuste vinculado difieren significativamente de las elipses del ajuste libre puesto que las primeras están influenciadas por los constreñimientos externos (puntos fijos). Si cambiamos los puntos fijos, cambian los parámetros de las elipses de error, es decir que son dependientes del datum. El tamaño de las elipses de error depende de la proximidad a los puntos fijos. En cambio las elipses del ajuste libre son invariantes respecto del datum creado por los puntos fijos y reflejan en forma confiable la precisión interna de la red.

La prueba F:

Interesa saber si las varianzas a posteriori $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ de los ajustes libre y vinculado respectivamente, difieren o no significativamente

El cociente de varianzas: $F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$ distribuye F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

Si $0 < F < F^{\alpha}_{\nu_1, \nu_2}$ donde $F^{\alpha}_{\nu_1, \nu_2}$ es el valor crítico para ν_1 y ν_2 grados de libertad y para el nivel de significación α , se acepta al nivel de confianza $1 - \alpha$ que ambas muestras no difieren significativamente y pertenecen a la misma población.

Para nuestro ejemplo 1 se tiene:

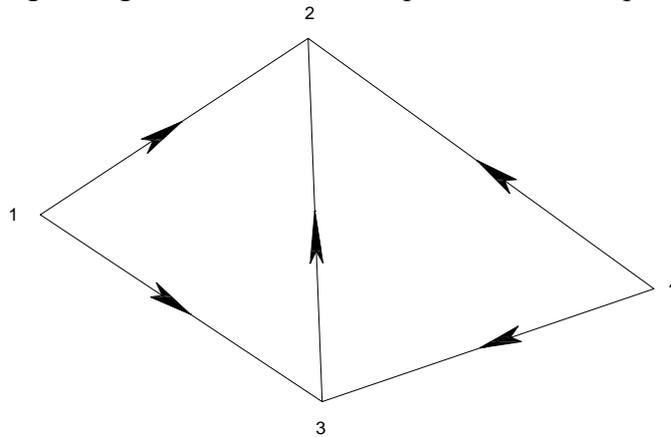
$$\text{Muestra 1: Red libre: } \nu_1 = 5, \hat{\sigma}_1^2 = 0.8619$$

$$\text{Muestra 2: Red vinculada: } \nu_2 = 6, \hat{\sigma}_2^2 = 0.7198$$

El estadístico F es: $F = \frac{0.8619}{0.7198} = 1.1974$ y el valor crítico: $F^{0.05}_{\nu_1, \nu_2} = 4.39$

Puesto que $F < F^{0.05}_{\nu_1, \nu_2}$, no existe diferencia significativa entre ambas varianzas muestrales y ambas pertenecen a la misma población.

Ejemplo2: Vamos a diseñar una red altimétrica donde nos imponemos el siguiente postulado de precisión: los errores estándar de las cotas ajustadas debe ser menor o igual que 4 mm. En la figura siguiente, las flechas apuntan hacia el punto del terreno de mayor cota.



figura

Planificamos medir cinco desniveles con un nivel y un procedimiento que garantice un error estándar de un desnivel $\sigma_h = 10 \frac{mm}{\sqrt{km}} \sqrt{L(km)}$, donde L es la longitud del tramo nivelado, expresada en kilómetros. Los datos están en la tabla siguiente:

tramo	1-2	4-2	3-2	1-4	3-4
longitud(m)	360	420	405	320	250
punto	1	2	3	4	----
Z°(m)	100	115	105	110	----

El número de observables es $n = 5$, el número de parámetros (cotas) es $m = 4$ y el número de grados de libertad es $r = 1$, entonces la redundancia de la red es $\nu = 2$. El diseño prueba y error se ejecuta con la aplicación MATLAB, REDALT_D. Los resultados son:

Errores estándar de las cotas:

punto	1	2	3	4
σ_z (mm)	3.2	2.7	3.1	2.5

Fiabilidad:

Índices de sensibilidad de la red: $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\delta_0 = 2.80$

desnivel	r_i	$ \nabla_{0i} $ (m)	μ_{INi}	μ_{Exi}
1-2	0.3847	27.1	4.5144	3.5411
4-2	0.5573	24.3	3.7507	2.4956
3-2	0.4428	26.8	4.2078	3.1409
1-4	0.3419	27.1	4.7886	3.8847
3-4	0.2733	26.8	5.3560	4.5658

$$\Sigma r_i = 2$$

$$r_m = 0.4$$

Transferencias a cotas: Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1:(desnivel 1-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	-10.0	7.0	3.0	00.0

Observable 2:(desnivel 4-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	00.0	6.0	1.0	-5.0

Observable 3:(desnivel 3-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	3.0	7.0	-8.0	-1.0

Observable 4:(desnivel 1-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	-11.0	0.0	4.0	7.0

Observable 5:(desnivel 3-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	4.0	0.0	-12.0	8.0

El diseño no resulta satisfactorio puesto que la influencia de los errores no detectados por el ω -test de Baarda sobre las cotas, es mayor que el error postulado (4 mm).

Intentaremos un nuevo diseño con un instrumento que permita obtener:

$$\sigma_h = \frac{3 \text{ mm}}{\sqrt{\text{km}}} \sqrt{L(\text{km})}$$

Los resultados son en este caso:

Errores estándar de las cotas:

punto	1	2	3	4
σ_z (mm)	1.0	0.8	0.9	0.7

Fiabilidad:

Índices de sensibilidad de la red: $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\delta_0 = 2.80$

desnivel	r_i	$ \nabla_{0i} $ (m)	μ_{INi}	μ_{Exi}
1-2	0.3847	8.0	4.5144	3.5411
4-2	0.5573	7.3	3.7507	2.4956
3-2	0.4428	8.0	4.2078	3.1409
1-4	0.3419	8.1	4.7886	3.8847
3-4	0.2733	8.0	5.3560	4.5658

$$\Sigma r_i = 2$$

$$r_m = 0.4$$

Transferencias a cotas: Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1:(desnivel 1-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	-2.9	2.1	0.8	-0.1

Observable 2:(desnivel 4-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	0.0	1.7	-0.3	-1.5

Observable 3:(desnivel 3-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	0.8	2.0	-2.5	-0.3

Observable 4:(desnivel 1-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	-3.2	-0.1	1.3	2.1

Observable 5:(desnivel 3-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	1.2	0.0	-3.5	2.3

Las influencias de los errores no detectados por el ω -test de Baarda sobre las cotas, no superan al error postulado (4 mm). Este diseño es satisfactorio.

Vamos a simular los desniveles de la red aceptando que el máximo error tolerable es:

$$T = 2.5 \sigma_h$$

Si definimos las cotas exactas o verdaderas por:

punto	1	2	3	4
Z(m)	98.102	117.221	103.890	111.628

Se tiene:

tramo	1-2	4-2	3-2	1-4	3-4
desnivel exacto(m)	19.119	5.593	13.331	13.526	7.738
Desnivel simulado(m)	19.121	5.591	13.332	13.528	7.736

El criterio para simular las observaciones (desniveles geométricos) a partir de los desniveles exactos, es el mismo que se aplicó en el ejemplo de la red plana.

mall	error de cierre (mm)	tolerancia (mm)
I	2.0	7.9
II	-5.0	7.8

En ambas mallas los errores de cierre altimétricos están por debajo de la tolerancia, podemos entonces comenzar con el ajuste libre de la red simulada que se ejecuta con la aplicación MATLAB, REDALT_A, siguiendo el diseño satisfactorio.

La varianza a posteriori $\hat{\sigma}_0^2 = 1.2921$ del ajuste libre supera la prueba chi-cuadrado en tres iteraciones, $\chi^2_{2, 0.025} = 0.0506$, $\chi^2_{2, 0.975} = 7.38$.

Cotas ajustadas y sus errores estándar:

punto	1	2	3	4
Z(m)	97.8900	117.0110	103.6809	111.4181
σ_z (mm)	1.1	0.9	1.01	0.8

Fiabilidad:

Índices de sensibilidad de la red: $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\delta_0 = 2.80$

obs.	v_i (mm)	ω_i	r_i	$ \nabla_{0i} $ (m)	μ_{INi}	μ_{Exi}
1	0.0	-0.0160	0.3847	8.1	4.5144	3.5411
2	2.0	1.3547	0.5573	7.3	3.7507	2.4956
3	-1.9	-1.4765	0.4428	8.0	4.2078	3.1409
4	0.0	0.0160	0.3419	8.1	4.7886	3.8847
5	1.2	1.4765	0.2733	8.0	5.3560	4.5658

$$\Sigma r_i = 2$$

$$r_m = 0.4$$

Transferencias a cotas: Vectores de fiabilidad externa:

Observable 1:(desnivel 1-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	-2.9	2.1	0.8	-0.1

Observable 2:(desnivel 4-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	0.0	1.7	-0.3	-1.5

Observable 3:(desnivel 3-2)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	0.8	2.0	-2.5	-0.3

Observable 4:(desnivel 1-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	-3.2	-0.1	1.3	2.1

Observable 5:(desnivel 3-4)

	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4
ISZ(mm):	1.2	0.0	-3.5	2.3

Desniveles ajustados y sus errores estándar:

desnivel	1-2	4-2	3-2	1-4	3-4
obs. ajustada(m)	19.1210	5.5930	13.3301	13.5280	7.7372
error estándar(mm)	1.6	1.5	1.6	1.6	1.5

El ajuste libre de la red simulada concuerda sensiblemente con el diseño satisfactorio.

Vamos a ejecutar ahora el ajuste vinculado de la red simulada con la aplicación REDALT_A. Consideramos fijo el punto 1 y le asignamos un error igual a 1mm a su cota:

PF	Z(m)	σ_z (mm)
1	98.0102	1

El punto fijo anula el único grado de libertad de la red altimétrica, entonces la redundancia de la red es $\upsilon = 2$.

La varianza a posteriori del ajuste vinculado $\hat{\sigma}_0^2 = 1.2921$ pasa la prueba chi-cuadrado en tres iteraciones.

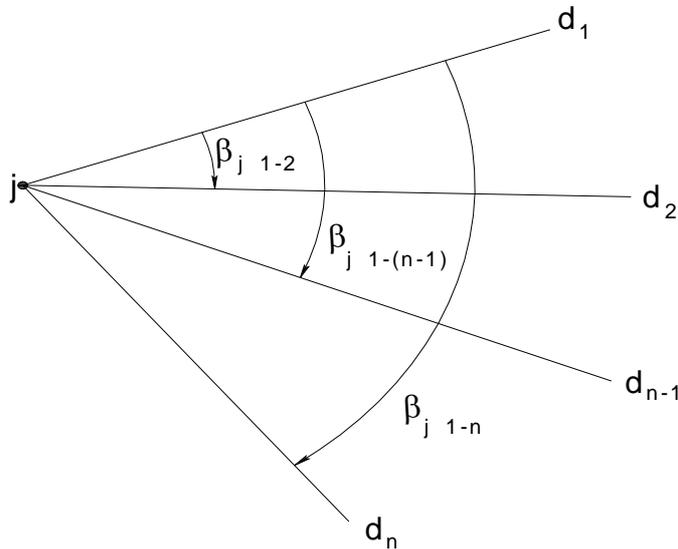
Cotas ajustadas y sus errores estándar:

punto	1	2	3	4
Z(m)	98.0102	117.1312	103.8011	111.8382
σ_z (mm)	1.1	2.0	2.3	1.9

-----°-----

TRABAJO PRÁCTICO 4: DISEÑO, SIMULACION Y AJUSTE DE REDES TOPOGRAFICAS.

E1. En el j-ésimo vértice de una red plana se observan n direcciones horizontales según la figura siguiente:



Las direcciones horizontales d_{j1} , d_{j2} , $d_{j(n-1)}$, d_{jn} , son observaciones independientes con error estándar σ_{dh} , que generan un conjunto $\beta_{j \ 1-2}$, $\beta_{j \ 1-3}$, $\beta_{j \ 1-(n-1)}$, $\beta_{j \ 1-n}$ de ángulos correlacionados. Hallar la matriz varianza-covarianza Σ_β del vector $\beta = [\beta_{j \ 1-2}, \beta_{j \ 1-3}, \beta_{j \ 1-(n-1)}, \beta_{j \ 1-n}]^T$ y la matriz de los pesos P_β , si los ángulos se definen como:

$$\begin{aligned} \beta_{j \ 1-2} &= d_{j2} - d_{j1} \\ \beta_{j \ 1-3} &= d_{j3} - d_{j1} \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_{j \ 1-(n-1)} &= d_{j(n-1)} - d_{j1} \\ \beta_{j \ 1-n} &= d_{jn} - d_{j1} \end{aligned}$$

Construya la matriz P de los pesos para una red plana de trilateración con p puntos, si los ángulos en cada estación se diseñan según la figura anterior. Considere que las distancias son independientes.

E2: Diseñe, simule y ajuste sus propias redes topográficas: planas y altimétricas. En el caso de las redes planas, considere las correlaciones entre los ángulos horizontales. Hágalo ahora sin considerar las correlaciones entre ángulos y establezca las diferencias.



BIBLOGRAFIA

Aguilar, F. (1942) “Lecciones de Geodesia: Teoría de los Errores de Observación y Cálculo de Compensación por el Método de los Mínimos Cuadrados”
Centro de Estudiantes de Ingeniería-UNLP.

Berné Valero, Jose Luis (2001). “Microgeodesia y Redes de Alta Precisión. Proyecto Práctico 2001”. Universidad Politecnica de Valencia.

Bjerhammar, A. (1973) “Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses”
Elsevier Scientific Publishing Company.

Bolshakov, V. y Gaidayev, P. (1989) “Teoría de la Elaboración de Mediciones Geodésicas”
Editorial MIR-Moscú.

Brunini, Claudio (1992). “Compensación de Redes”. UNLP.

Chrzanowski, Adam (1974). “Adjustment and Error Analysis of Surveying Networks”
Department of Surveying Engineering-University of New Brunswick- Fredericton, N.B.

Chueca Pazos, Manuel, Herraes Boquera, José, Berné Valero, José Luis (1996). “Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia”. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Geodésica, Cartografía y Topografía. Universidad Politecnica de Valencia. Editorial Paraninfo.

Etter, Delores M. (1998). “Solución de problemas de ingeniería con MATLAB”
Segunda edición. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Colorado, Boulder. Prentice-Hall.

Forsythe, G. y Moler C. (1973). “Solución mediante computadoras de Sistemas Algebraicos Lineales” Ed. EUDEBA / Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Kuang, Shanlong (1996). “Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications”. Ann Arbor Press, Inc. Chelsea, Michigan

Leick, Alfred (1995). “GPS Satellite Surveying”. Department of Surveying Engineering. University of Maine. Orono. John Wiley & Sons, Inc.

Rainsford, Hume (1957). “Survey Adjustment and Least Squares”. Constable.

Spiegel, Murray (1996). “Probabilidad y Estadística”. Segunda edición. Schaum-McGraw Hill.

Strang, Gilbert (1986). “Algebra Lineal y sus Aplicaciones”. Massachusetts Institute of Technology”. Addison-Wesley Iberoamericana.

-----°-----